

Maandblad voor de didactiek van de wiskunde

Orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren en van de Wiskunde-werkgroep van de w.v.o.

49e jaargang
1973/1974
no 2
oktober

Wolters-Noordhoff

EUCLIDES

Redactie: G. Krooshof, voorzitter - W. Kleijne, secretaris - Dr. W. A. M. Burgers - Drs. F. Goffree - Dr. P. M. van Hiele - Drs. J. van Lint - L. A. G. M. Muskens - P. Th. Sanders - Dr. P. G. J. Vredenduin - Drs. B. J. Westerhof.

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren en van de Wiskundewerkgroep van de W.V.O.
Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Secretaris: Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, Den Haag.
Penningmeester en ledenadministratie: Drs. J. van Dormolen, Lange Voort 207, Oegstgeest. Postrekening nr. 143917 t.n.v. Ned. ver. v. Wiskundeleraren, te Amsterdam.
De contributie bedraagt *f* 20,— per verenigingsjaar.
Adreswijziging en opgave van nieuwe leden aan de penningmeester.

Wiskundewerkgroep van de W.V.O.

Leden van de groep kunnen zich abonneren op Euclides door aanmelding bij de secretaris: Drs. H. C. Vernout, van Nouhuysstraat 11, Haarlem (N), postrekening 261036 t.n.v. de penningmeester te Voorburg.

Artikelen ter opname worden ingewacht bij G. Krooshof, Dierenriemstraat 12, Groningen, tel. 050-772279. Zij dienen met de machine geschreven te zijn.

Boeken ter recensie aan Dr. W. A. M. Burgers, Prins van Wiedlaan 4, Wassenaar, tel. 01751-3367.

Mededelingen, enz. voor de redactie aan W. Kleijne, De Kluut 10, Heerenveen, tel. 05130-24782.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan Dr. A. J. E. M. Smeur, Dennenlaan 17, Dorst (N.B.).

Abonnementsprijs voor niet-leden *f* 21,50. Hiervoor wende men zich tot: Wolters-Noordhoff bv, Groningen, Postbus 58.

Redactiewisseling

Met een artikeltje onder deze titel opende het nummer van Euclides van september 1959. Er werd in aangekondigd dat de heer Drs. A. M. Koldijk het redactiesecretariaat op zich had genomen.
Inmiddels ligt 1 september 1973 al weer achter ons. Ruim veertien jaar lang was het als vanzelfsprekend dat met grote regelmaat tien nummers van Euclides per jaar verschenen.
Maar dat betekende voor Koldijk 140 nummers lang een voortdurende zorg: correspondentie met auteurs en uitgever, zorg voor het op tijd zijn van drukproeven en opmaak van het blad, het maken van het jaarlijkse register en nog zoveel dingen 'die geen naam hebben'.
Het is begrijpelijk dat er na zoveel jaren gedacht moest worden aan het aflossen van de wacht. Dat gebeurt dan nu: het doet ons veel genoegen te kunnen melden dat de heer W. Kleijne, De Kluut 10 te Heerenveen zich bereid heeft verklaard het redactiesecretariaat over te nemen. We wensen hem sterkte en geduld bij deze veeleisende functie. Gelukkig zal Koldijk hem met raad en daad bijstaan en hem inleiden in zijn nieuwe taak.
Namens de redactie en zeker ook namens besturen en leden van de verenigingen voor Koldijk tenslotte een welgemeend HARTELIJK BEDANKT.
Het is ons verder een genoegen te kunnen melden, dat de heer P. Th. Sanders, Amsterdam de reeds lang vacante 'mavo-plaats' in de redactie zal bezetten. Hem heten wij van harte welkom.

G. Krooshof

Ter gelegenheid van het afscheid van de heer Koldijk, vragen wij graag enkele regels redactionele ruimte in Euclides om ons aan te sluiten bij het dankwoord van de eindredacteur.

Als uitgever hebben wij in Koldijk een ideale contactpersoon gehad, met veel begrip voor bij de produktie van tijdschriften optredende technische problemen. En zeker bij een blad als Euclides met zettechnisch soms ingewikkelde kopij worden de corrector de problemen niet altijd bespaard!

Zonder punctuele en nauwlettende zorg van een redactiesecretaris is het regelmatig verschijnen van goed verzorgde afleveringen van een periodiek onmogelijk.

Voor de steun die we als uitgever bij de verzorging van Euclides van Koldijk hebben genoten, zijn we zeer erkentelijk.

Wolters-Noordhoff bv

Het programma wiskunde mavo-4 en de voortzetting ervan op mts/hts

P. I. A. KNOPS
Heerlen

Inleiding

Voordat de mammoetwet in werking trad, ging een groot gedeelte van de mulo-kandidaten naar de mts of hts*. Voor het vak wiskunde wisten ze op deze scholen aansluiting te vinden met hetgeen ze bij hun vooropleiding geleerd hadden. Momenteel doet zich bij de overgang van mavo-4 leerlingen naar het eerste jaar van de mts en het voorbereidend jaar van de hts het verschijnsel voor, dat deze leerlingen minder goede resultaten voor wiskunde gaan boeken dan voorheen. Indien dit werkelijk zo is, dan zouden we als mogelijke oorzaken kunnen aangeven:

1 De mavo-leerling deed examen in zes vakken. Bij het technisch onderwijs wordt dit pakket van verplichte vakken groter.
2 De moderne wiskunde richt zich in het technisch onderwijs meer op het technische vlak.
3 Wordt deze ongunstige beoordeling niet mede veroorzaakt door het feit, dat de ontvangende leraar deze leerlingen vergelijkt met zijn klasgenoten, die van verschillende mavo-scholen komen, die dit vak wel of niet benadrukken?
4 Een andere oorzaak zou kunnen zijn de interpretatie van de verschillende programma's.
Om een en ander aan te „tonen" zullen we beide schooltypen nader proberen te bekijken voor wat het vak wiskunde betreft.

De overgang naar de mts

Daar de meeste leerlingen van het mavo naar de mts gaan, inplaats van naar het voorbereidend jaar van de hts lijkt het ons nuttig te „onderzoeken" of een aantal wiskunde boeken voor het eerste jaar van de mts als verlengstuk kan dienen van de veel gebruikte mavo-methodes *Moderne Wiskunde* en *Van A tot Z.*

I *Wiskunde techniek* - J. H. Toorman, W. A. Duvekot, J. E. Maas. Deel 1. Uitgave: Educaboek N.V. Culemborg.
De serie bestaat uit drie delen, waarin achtereenvolgens het basisprogramma en het keuzeprogramma worden behandeld. Voor ons doel is deel 1 belangrijk. In hst. 1 wordt de verzameling der reële getallen behandeld. Voor de vroegere gebruikers van de mavo-editie *Moderne Wiskunde* is dit op ongeveer gelijke wijze behandeld nl. gesloten zijn, commutatieve wet, associatieve wet, distributieve wet, nulelement, tegengestelde. De absolute waarde van een getal is nieuw. In *Van A tot Z* is het in de derde klas even ter sprake gekomen.

* Speciale dank ben ik verschuldigd aan hts-collega's, die mij de nodige gegevens verschaften.

Hst. 2 geeft een uiteenzetting over relaties en funkties. Dit moet bekend zijn bij de leerlingen. Ter sprake komen o.a. pijlverzameling, definitieverzameling, waardenverzameling. Enige moeite zal men hebben met de equivalentierelaties en met de inverse functies.
Verhoudingen, evenredigheden en formules worden behandeld in hst. 3. Moeilijkheden zal de paragraaf formules geven. Hier duikt men meteen in de natuurkunde nl. formule van Hooke, formule van de buigspanning. De leerlingen moeten het verband opsporen tussen een aantal onbekende grootheden in de formule. Ook wordt al enigzins verwacht uit de grafiek het verband tussen de grootheden te kunnen aflezen.
Hst. 4 dient bekend te zijn. Het behandelt de machten en wortels. Logaritmen (hst. 5) is een voortzetting van hst. 4 nl. machtsverheffen. Dit onderdeel is geheel nieuw voor de mavo-leerlingen. Het is het meest omvangrijk hoofdstuk uit het boek.
In hst. 6 komen de vergelijkingen en ongelijkheden ter sprake. In het mavoprogramma is hier ruimschoots aandacht aan besteed, zodat de aansluiting wel zal lukken.
Lineaire vergelijkingen omvatten de leerstof van het zevende hoofdstuk. De besproken begrippen zijn o.a. richtingscoëfficient, produkt van twee richtingscoëfficiënten is -1, doorsnede van twee lineaire relaties. Tenslotte volgen nog de lineaire ongelijkheden. We zien dat in dit hoofdstuk niet veel nieuwe leerstof gegeven wordt.
Hst. 8 geeft de kwadratische vergelijkingen, functies en ongelijkheden. Het oplossen van vkv geschiedt door middel van ontbinden of de *abc*-formule. De discriminant komt ter sprake en de som en produkt der wortels. Bij de kwadratische functies gaat men het maximum of minimum bepalen door 'kwadraat afsplitsen en daarna weer rechtbreien'. Nieuw in dit hst. zijn de lineaire gebroken functies. Dit behoort niet tot het mavo-programma. Nochtans besteedt de methode *Van A tot Z* er enige aandacht aan.
Het volgende hst. draagt de titel: 'gelijkvormige transformaties'. Als inleiding worden eerst de 'congruente transformaties' bekeken nl. lijnspiegeling, puntspiegeling, translatie, schuifspiegeling, rotatie. Nieuw is tevens: direkte en indirekte congruentie, direkte en indirekte gelijkvormigheid.
In hst. 10 bespreken de schrijvers de cirkelfuncties. Sinus, cosinus, tangens worden behandeld met behulp van de eenheidscirkel. Ook het begrip radiaal wordt geïntroduceerd, tevens de zg. periodieke functies. In de mavo-editie van *Moderne Wiskunde* wordt de eenheidscirkel wel gebruikt. *Van A tot Z* geeft een behandeling van sinus en cosinus met behulp van inprodukten van eenheidsvectoren.
Het boek besluit met een hoofdstuk over vectoren. Veel nieuws zullen de meeste mavo-leerlingen niet vinden. Aan de orde komen o.a. kentallen, norm van een vector, somvector, verschilvector, inprodukt.

II *Moderne wiskunde voor het mbo* - J. Lauwen mmv. J. Runhaar. Deel 1. Uitgave: Nijgh & Van Ditmar. 's-Gravenhage.
'De eerste lessen geven een herhaling van onderwerpen uit de vooropleiding van de leerling' aldus het voorwoord van de methode. In het boek maakt men onderscheid tussen het basisprogramma en het keuzeprogramma. Na elk zestal hoofdstukken volgt eèn samenvatting en herhaling. Ook in deze methode is het eerste gehele nieuwe onderwerp de logaritmen (hst. 13 t/m 17). In de dan volgende

hoofdstukken komen de relaties en functies aan de beurt (hst. 21 t/m 28). In hst. 36 behandelen de schrijvers het eerste keuzeonderwerp nl. de plaatsvector in poolcoördinaten. Vooraf gingen: het optellen en vermenigvuldigen van vectoren (hst. 33), kentallen van vectoren (hst. 34) en de vectorvergelijking van een rechte (hst. 35). Hierna volgen een drietal hoofdstukken over transformaties. De hst. 49 t/m 54 zijn keuzeonderwerpen nl. foutenrekening. De goniometrische verhoudingen worden behandeld met behulp van de eenheidscirkel. Sinus- en cosinusregel komen ter sprake en tenslotte nog eenvoudige goniometrische vergelijkingen. Het boek besluit met de keuzeonderwerpen: rijen en reeksen. Kenmerkend voor dit boek is, dat in de oefenopgaven weinig vraagstukken zijn opgenomen, die specifiek op de techniek betrekking hebben. *Misschien* is het boek hierdoor goed verteerbaar voor de mavo-leerling.

III De nu volgende leergang bestaat uit een aparte editie voor algebra en meetkunde.
A *Nieuwe algebra voor de mts* - A. Pigmans. Uitgave: Wolters-Noordhoff. Groningen. Het boek begint met aansluiting te zoeken bij de vooropleiding van de leerlingen. De eerste 65 pagina's vormen zodoende een herhaling. Vervolgens komen in hst. 1 de bewerkingen met *irrationele wortels* ter sprake. Het begrip relatieve fout is nieuw. In hst. 2 komen de vergelijkingen met één veranderlijke aan de orde, zowel lineaire als kwadratische vergelijkingen. Bij deze laatsten gebruikt men de *abc*-formule na eerst nog enige aandacht te hebben besteed aan het ontbinden. De stof van hst. 3 bestaat uit het omvormen van formules. Ter sprake komen de begrippen variabele en parameter. Als inleiding op hst 5 logaritmen behandelt men in hst. 4 het machtsverheffen. Na hst. 4 volgt eerst nog een test over hst. 1 t/m 4. Aan de introductie van de logaritmen worden in totaal vier hoofdstukken gewijd nl. hst. 5 t/m 8. Om de kennis van de leerlingen te toetsen is na hst. 8 een tweede test opgenomen. In hst. 9 bespreekt men de rekenliniaal nl. de rekenregels voor de komma. Functierelaties is het onderwerp van hst. 10. Om aansluiting met het bekende te verkrijgen wordt eerst nog verwezen naar het begin van het boek. Met functierelatie wordt tenslotte bedoeld functie (pag: 152). Hst. 11 behandelt de lineaire functies. Nieuw in dit hst. zijn de begrippen stijgende en dalende functie. Enkele andere functies worden behandeld in hst. 12. Aan de orde komen:
a) de gebroken lineaire functie, deze behoort tot het basisprogramma.
b) de exponentiële functie.
c) de logaritmische functie.
Beide laatste functies behoren tot het keuzeprogramma. Hierna volgt test 3. In hst. 13 worden de ongelijkheden met één veranderlijke behandeld, terwijl hst. 14 de lineaire vergelijkingen en ongelijkheden met twee veranderlijken biedt. Hst. 15 is een keuze hst. over lineaire vergelijkingen met drie variabelen. Nomografie I is het onderwerp van hst. 16. Ook dit is een keuzeonderwerp. De hst. 17 en 18 handelen over kwadratische vergelijkingen en kwadratische functies. Vóór de *abc*-formule worden de leerlingen vertrouwd gemaakt met kwadraatafsplitsen. Het geheel gebeurt vrij degelijk. Nomografie II is het keuzeonderwerp van hst. 19, terwijl hst. 20 statistiek behandeld. De inhoud en de diepte ervan stemmen overeen met hetgeen de leerlingen volgens het mavo-programma moesten verwerken. Tenslotte geeft hst. 20 als keuzeonderwerp een inleiding in de schakellogica. Leerlingen, die in mavo-4 reeds computerkunde konden doen, zullen hier met een meer technische behandeling kennis kunnen maken.

B *Metrica, meetkunde voor de mts* - A. Pigmans, C. Jespers. Uitgave: Wolters-Noordhoff. Groningen.
Het is een gemoderniseerde uitgave van het gelijknamige boek, waarvan de eerste druk in 1960 verscheen. Er blijkt dus wel behoefte aan deze uitgave. Het boek is bedoeld voor het eerste en tweede leerjaar. Bij de opdrachten zijn er die voorzien zijn van de letters W,E,B. Ze zijn bedoeld voor de leerlingen van die betreffende afdelingen. Evenals het deel over algebra begint men met een herhaling van:
a) transformaties,
b) verzamelingen (in een later volgend hst. wordt hierop verder ingegaan),
c) hoeken en driehoeken (de woorden Z-hoek, F-hoek treffen we niet aan),
d) eigenschappen van enkele figuren,
e) goniometrische verhoudingen,
f) evenredigheden van lijnstukken.
Hst. 1 handelt over: het getal π en de cirkel. Er worden enkele definities gegeven, omtrek en oppervlakte van de cirkel. De gelijkvormige transformaties worden behandeld in hst. 2 nl. de vermenigvuldiging, gevolgd door een aantal toepassingen. Hst. 3 geeft vectoren. Als inleiding worden de eisen gegeven, waaraan een optelgroep dient te voldoen. Hierna volgen: optellen van vectoren, vermenigvuldigen met een scalair. In hst. 4 komen de goniometrische verhoudingen nogmaals ter sprake, gevolgd door een aantal toepassingen, terwijl hst. 5 als keuzeonderwerp de goniometrische schalen op de rekenliniaal geeft. In hst. 6 komen de poolcoördinaten ter sprake. De hst. 7 en 8 geven berekeningen in driehoeken. Toepassingen van goniometrie, sinusregel, cosinusregel, hanteren van log-tafel en/of goniometrische tabellen is het voornaamste doel. Hst. 9 behandelt de goniometrische functies met behulp van de opwindfunctie. Het begrip radiaal en grafieken van goniometrische functies volgen hierna. Een aantal toepassingen uit de techniek over berekeningen met radialen volgen in hst. 10. Ook aan de decimale graad wordt enige aandacht besteed, speciaal voor de afdeling bouwkunde. Puntverzamelingen in R2 en R3 (hst. 11) vormen een gedeeltelijke herhaling, gevolgd door enige uitbreiding.
In hst. 12 komt de inhoud van de verschillende lichamen ter sprake, terwijl hst. 13 een oppervlakte-benadering bij rotatielichamen geeft. Voor de afdeling bouwkunde is hst. 14 doorsneden van lichamen als keuzeonderwerp opgenomen. Hst. 15 geeft het verband tussen sinus, cosinus en tangens; de hst. 16, 17, 18 zijn keuzeonderwerpen voor de afdelingen werktuigbouwkunde en elektrotechniek. Ze behandelen achtereenvolgens:a) formules voor som en verschil van hoeken,
b) formules voor dubbele hoeken,
c) complexe getallen als vectoren.

De overgang van mavo-4 naar de hts

Alleen de allerbeste mavo-4 kandidaten doen de overstap naar het voorbereidende jaar van de hts. De resultaten die in het verleden werden behaald waren niet zo positief te noemen. Het waren *eerste* ervaringen met een vrij kleine groep leerlingen. Om enig inzicht te verkrijgen hebben we alle hts-en ervaringen gevraagd met mavo-kandidaten, terwijl we tevens het leerplan vroegen van het voorbereidende jaar, speciaal voor her vak wiskunde.

Allereerst zullen we de lessentabel voor wiskunde laten volgen, hierna geven we een overzicht van de leerboeken die men gebruikt, daarna volgt een opsomming van onderwerpen die de leerplannen vermelden en tenslotte een aantal ervaringen met mavo-kandidaten.

De lessentabel wiskunde in het voorbereidende jaar

No	A.M + algebra	Ster.	Gonio.	Wisk. I	Wisk. II	Instr.	Vect. meetk.	Tot. uren
1	2	2	1					5
2				5	2			7
3				4	3			7
4				5		2		7
5	?	?	?					9
6	4	$1\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2}$					7
7	4	2	1					7
8	4	2	2					8
9	5	2	2					9
10	4		1				3	8
11	4		3					7
12				1	2	6		9
13	4	2	2					8
14				5	4			9

De school die het minste aantal uren wiskunde geeft, heeft 5 lesuren per week. Het hoogste aantal lesuren is 9. Uit de tabel blijkt, dat van de ongeveer 25 hts-en er 14 waren, die de lessentabel meedeelden. Opvallend is tevens, dat men vaak niet hetzelfde verstaat onder wiskunde I en wiskunde II.

Welke boeken worden er zoal gebruikt?

Algebra, analyse ed.:

1 Snoek-Streefkerk: Inleiding tot de analyse, Stam.
2 Dop ea.: Wiskunde bovenbouw havo deel: 1, 2, 3, Wolters-Noordhoff (5x).
3 P. E. Lepoeter - W. J. Bos: Wegwijzer in de algebra deel III, J. Meulenhoff.
4 P. E. Lepoeter: Gids voor de algebra van de b-afdeling van het VHMO, J. Meulenhoff (2x).
5 J. van Dormolen: Analyse deel I en II, Van Goor & Zn.
6 H. Montagne: Wiskunde I. Wolters-Noordhoff.
7 R. Boons: Vraagstukken diff-en int-rekening, Stam.
8 250-opgaven. Wimecos-commissie, Wolters-Noordhoff.

Goniometrie:
1 J. van Dormolen: Goniometrische functies, Van Goor & Zn.
2 F. Groen: Goniometrie, Thieme.
3 B. v. Soldt: Goniometrie, Stam (2x).
4 P. E. Lepoeter: Gids voor de goniometrie v. d. b-afdelingen, J. Meulenhoff (2x).
5 W. K. Baart: Goniometrie voor de HTS, Stam.

Stereometrie:
1 De Kimpe: Construeer, Meulenhoff.
2 Trouerbach ea.: Stereometrische vraagstukken, Van Herwijnen.
3 Liefkens: Werkschrift Stereometrie (niet in de handel).
4 Snoek - Streefkerk: Pr. Ruimtemeetkunde, Stam.

Analytische meetkunde:
1 P. E. Lepoeter: Gids voor de analytische meetkunde van de b-afdelingen, J. Meulenhoff.
2 L. R. Westermann: Meetkunde met vectoren deel I, II, Wolters-Noordhoff.
3 v. Dop ea.: Vectormeetkunde deel: I, II, Wolters-Noordhoff.
4 Bijl - Kijne - Salet: Basis van de Analytische meetkunde, J. M. Meulenhoff.
5 G. Ludolph: Coördinatenleer, Wolters-Noordhoff.

Diversen:
1 Lehman: De rekenliniaal, Het Spektrum (Prisma Technica nr. 30).
2 De Galan: Hoe werk ik met de rekenliniaal, Stam.
3 Carmicheal and Smith: Mathematical Tables and Formulas, Dover Puplications New-York.
4 Wiskunde Tafels, Prisma nr. 1267.
5 C. Harvey: Verzamelingen en verzamelingssymbolen. Een geprogrammeerde tekst, Wolters-Noordhoff.
6 Geerts ea.: Werken met de rekenliniaal (een geprogrammeerde tekst), Nijgh en van Ditmar.

Wat vermelden de leerplannen van het voorbereidende jaar?

Meestal zal de betreffende docent zich zoveel mogelijk houden aan het door hem gebruikte leerboek. In de meeste gevallen zal dat de behandelde leerstof zijn. Toch volgt hieronder een opsomming van de onderwerpen, zoals die blijkt uit de leerplannen. Achter elk onderwerp vermelden we de frequentie.

Algebra en analyse
1 repetitie van de stof van de vooropleiding, plus uitbreiding (4x)
2 grafische algebra: coördinatenstelsels in het vlak, de lineaire functie (4x)
3 vierkantsvergelijkingen; kwadratische functie (9x)
4 hogere machtsvergelijkingen (2x)
5 oneigenlijke machten (4x)
6 logaritmen (11x)
7 lineair gebroken functies (6x)
8 wortelfuncties (3x)
9 gebroken kwadratische functies, drie typen (2x)
10 het begrip inverse functie (4x)
11 rijen, reeksen (5x)
12 rekenkundige en meetkundige rijen (4x)
13 limieten (rijen, reeksen, functies) (9x)
14 beginselen van differentiaal en integraal rekening:
  a differentiëren van functies (9x)
  b regels van differentiëren (5x)
  c primitiveren van functies (6x)
  d foutenrekening als toepassing van differentiaal-rekening (2x)
  e kettingregel (4x)

15 samengestelde functies (2x)
16 continuïteit, discontinuïteit (3x)
17 asymptoten (2x)
18 het getal e, exponentiële functie (2x)
19 ongelijkheden (5x)
20 vergelijkingen (3x)
21 verzamelingen en logica (5x)
22 modulusfuncties (3x)
23 binomium van Newton (2x)
24 bewerkingen met complexe getallen (2x)
25 boole-algebra met toepassingen
26 kansrekening
27 statistiek
28 lineaire programmering

Goniometrie

1 goniometrische verhoudingen: sin (6x), cos (6x), tg (6x), cosec (2x), sec (2x), cotg (2x)
2 kwadraten
3 goniometrische formules: $\text{tg}\ \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, $\text{cotg}\ \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$, $\text{tg}^2\ \alpha + 1 = \sec^2 \alpha$, $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$
4 grafieken van: $y = \cos \alpha$ (3x), $y = \cos \alpha$ (3x), $y = \text{tg}\ \alpha$ (3x), $y = \text{cotg}\ \alpha$ (3x)
5 goniometrische verhoudingen van: sommen (10x), verschillen (10x)
6 sinusregel (6x), cosinus-regel (6x), tangens-regel (4x) plus toepassingen
7 oplossen van eenvoudige vergelijkingen o.a. $a \sin \alpha + b \cos \alpha = c$ (6x)
8 cyclometrische functies (3x)
9 meten van hoeken en bogen, radiaal (4x)
10 opzoeken in tafels (3x)
11 formules van dubbele en halve hoeken (6x)
12 rekenliniaal en logaritmentafel (7x)
13 afgeleiden van goniometrische functies (2x)
14 kwadratische en lineair gebroken functies van sin α, cos α, tg α
15 limieten (2x)

Analytische meetkunde

1 beginselen van de a.m.: lijn (6x), cirkel (6x), parabool (7x), ellips (3x), hyperbool (3x)
2 raaklijnen aan de krommen onder 1 vermeld (verband tussen lijnen en krommen) (4x)
3 verzamelingen van punten (2x) (directe en indirecte methode)
4 afstand van een punt tot een cirkel
5 hoek van twee krommen (lijnen) (3x)
6 machtlijn (3x)
7 poollijn (3x)
8 lijnenbundels (2x)
9 snijdende, evenwijdige, samenvallende lijnen (2x)
10 construktie van parabool, ellips, hyperbool
11 poolcoördinaten (2x)
12 krommen voorkomend in de natuurkunde en technische vakken
13 definitie van bol, vergelijking van bol
14 translatie-formules (2x)
15 cirkelbundels

Stereometrie

1 berekeningen in kubus (3x)
2 stand van lijnen en vlakken tov. elkaar (3x)
3 axioma's, grondbegrippen, stellingen over evenwijdigheid en loodrechte stand
4 afstanden
5 ruimteconstrukties (5x)

6 verzamelingen (4x)
7 piramide (5x), prisma (5x), kegel (3x), cilinder (3x), blok, bol (2x), viervlak (3x)
8 oppervlakte en inhoud van de meest voorkomende lichamen (7x)
9 hoek van lijn en vlak (3x)
10 hoek van twee vlakken (3x)
11 netwerken

Daar een aantal scholen geen indeling in bovengenoemde vakken maken, vermelden we nog hetgeen we tegenkwamen over:

Vectormeetkunde (R2 en/of R3)
1 vectoren in het vlak (4x)
2 vectoren in de ruimte (4x)
3 somvector (2x), verschilvector (2x), normaalvector (3x)
4 inwendigprodukt (4x), uitwendigprodukt (2x)
5 absolute waarden van vectoren
6 vectorvoorstelling van rechte lijnen (7x)
7 scalaire vermenigvuldiging (3x)
8 vergelijking van bol, cirkel (2x)
9 afhankelijkheid en onafhankelijkheid van stelsels (3x)
10 determinanten
11 matrices (4x):
- a som en produkt van matrices (3x)
- b nulmatrix
- c tegenstelde matrix
- d vierkante matrix
- e hoofddiagonaal
- f eenheidsmatrix
- g inverse matrix (2x)

12 afbeeldingen (via matrices) (3x):
- a spiegelingen (3x)
- b rotaties (2x)
- c vermenigvuldigen tov. de oorsprong (2x)
- d produkt van twee afbeeldingen (2x)

13 kentallen
14 vectorvoorstelling van het platte vlak
15 oppervlakten en inhouden

Enige resultaten van mavo-4 leerlingen en eventuele andere leerlingen in het voorbereidende jaar van de hts

In het onderstaande zal getracht worden een aantal ervaringen weer te geven zoals die *uit de onderwijsveld* werden ontvangen.
1 In het voorbereidende jaar doubleert ongeveer 65%. Ongeveer een derde deel hiervan verlaat in of na het kursusjaar het voorbereidende jaar van de hts.
2 De bevorderingsresultaten van mavo-4 leerlingen zijn geweest:

	aantal	bevorderd	aantal mts	bevorderd
voor 1973	120	53,2%	29	75%
voor 1972	133	52,6%	27	93%

Het verschil met de studieresultaten van mts-ers is evident en is waarschijnlijk terug te voeren tot een veel sterker aanwezige motivatie van de mts-leerling (leeftijd???).

3 Uit de leerstofomschrijving is te constateren, dat de aansluiting geen moeilijkheden behoeft op te leveren en doet dat ook niet. Om het programma in het voorbereidende jaar met succes te kunnen doorwerken (9 lesuren per week) is wel een behoorlijk wiskundige aanleg nodig.
4 Praktische resultaten met mavo-abiturienten: 1971 6 geplaatst - 6 afgewezen, 1972 18 geplaatst - op grond van kerstrapport vermoedelijk 17 afgewezen. Toelatingseis: voor exacte vakken op *landelijk* examen 7 of meer.
Op grond van deze resultaten meent men, dat er geen aansluiting is tussen mavo en hts. Als voorbeeld uit de wiskundesector wordt gegeven: de mavo geeft geen les in het begrip en de toepassing van logaritmen. Eveneens niet in oneigenlijke machten. Dit is voor de wiskunde in het voorbereidende jaar onaanvaardbaar. Advies: eerst mts.
5 We laten alleen mavo-abiturienten toe die zeer goede examenresultaten wis- en natuurkunde hadden bij een vlot studieverloop op het mavo. Van deze groep ziet slechts één derde tot de helft kans het voorbereidende jaar in één jaar met succes te doorlopen.
6 Om zoveel mogelijk aansluiting te zoeken bij het havo werd dit jaar gekozen de methode: Dop ea. Wiskunde bovenbouw havo deel 1, 2, 3. (Wolters-Noordhoff). Deze methode beslaat de wiskunde van 4e en 5e klas havo en geeft dus ook aansluiting op de mavo-wiskunde. Bij de overgang naar H1 hebben de VB-studenten dan een praktisch gelijkwaardige wiskunde kennis als de havo-gediplomeerde, die rechtstreeks in H1 komt. Het op dit moment verouderde leerplan doet geen dienst meer en moet aan de gewijzigde omstandigheden worden aangepast.
Nog enkele ervaringsfeiten:
a de VB-klas bestaande uit vnl. leerlingen met 2 of 4 jaar mts behalen voor repetities gemiddeld 0,9 punt meer dan de VB-klas mavo-havo.
b de werklust in een VB-mts-klas is aanmerkelijk groter dan in een VB-mavo-havo-klas.
c de VB-ers die uiteindelijk toegelaten worden tot H1, doen het weer beter, dan de havo-gediplomeerden, die direkt dus niet via VB tot de H1-klas zijn toegelaten.
7 Aanvankelijk waren 10 studenten van het mavo afkomstig; 5 daarvan hebben in de loop van de cursus de school verlaten, omdat ze toch kansloos waren. Van de overigen waren de resultaten: Wiskunde I: 6 8 5 3 3 Wiskunde II: 6 8 5 4 5. De eerste twee zitten nu in de 1e klas, de derde en de vierde vierde zijn niet meer op school en de vijfde doubleert in het VB-jaar en doet het tot heden goed. Van alle studenten in het VB-jaar is de helft bevorderd. Deze cursus zijn we overgegaan op: Wiskunde voor de bovenbouw havo (Wolters-Noordhoff) om toe te werken naar het havopeil aan het begin van de eerste klas.
8 Omdat havo vereist is voor toelating tot de eerste klas hts, moet het examenprogramma havo-wiskunde als leerplan genomen worden. We veronderstellen, dat de toegelatenen tot het VB-jaar voldoende basiskennis hebben nl. de in klas 1 tot en met klas 3 havo onderwezen stof. Aan deze basiskennis ontbreekt nogal wat. Deze herhalen we in betrekkelijk hoog tempo. Als kandidaten dan misschien veel feitenkennis bezitten, maar in feite deze niet weten toe te passen op voor hen nieuwe problemen, dan is het niet mogelijk om aan het einde van het VB-jaar het vereiste niveau te bereiken. Aan zelfstandig denken ontbreekt het velen en zo ook aan de nodige zelfkritiek.

9 Slechts dit jaar hebben we een voldoende groot aantal mavo-kandidaten om enige voorzichtige conclusies te kunnen trekken. In voorafgaande jaren hadden we in totaal slechts 13 mavo-4 kandidaten. Hieronder volgen de resultaten van het kerstrapport:
Coördinaten-leer (4 uur per week).
6, 2, 5, 4, 5, 8, 6, 4, 4, 4, 7, 4, 2, 4, 6, 5, 4, 4, 5, 5, 6, 7, 6, 9, 5, 7. gemiddeld: 5,15.
Gonio-logica (3 uur per week).
6, 3, 4, 4, 5, 8, 6, 4, 5, 4, 8, 4, 4, 5, 7, 6, 6, 2, 5, 6, 7, 5, 7, 6, 5, 8. gemiddeld: 5,38.
Wel heerst de algemene opinie, dat het onderwijs in de 'moderne wiskunde' de technische rekenvaardigheid niet ten goede is gekomen, bv. heel wat leerlingen hebben moeite met

$$pv = c \Leftrightarrow v = \frac{c}{p}$$

We hebben slechts mavo-leerlingen aangenomen met A (onvoorwaardelijk geschikt) of B (goed) advies van de toeleverende scholen.
10 De ervaring met mavo-4 stiudenten is dit jaar niet ongunstiger dan vorige jaren. Bij wiskunde II hebben ze snel in de gaten waar het over gaat en wat de bedoeling is.
11 a de moeilijkheden voor de mavo-4 leerling zijn niet beperkt tot het vak wiskunde, doch gelden evenzeer voor natuur- en scheikunde.
b het falen van de mavo-4 leerling is voornamelijk te wijten aan het tempo waarin in het voorbereidende jaat gewerkt dient te worden. Alleen de zeer goede en zeer ijverige leerlingen maken een kans. Het ingangsniveau is voor de 1e klas het havo-diploma. Een mavo-4 leerling, die dit niveau niet kan halen, zal in het algemeen in het VB-jaar ook niet voldoen.
c momenteel zijn er 14 mavo-4 kandidaten in het VB-jaar. De verwachting is, dat er een zal slagen.
12 De hieronder vermelde resultaten zijn die van het rapport januari 1973 van degenen, die in september 1972 aankwamen. Praktisch alle *niet*-mavo leerlingen kwamen van de mts (2 jr.). Mavo en mts was gemengd in de klassen opgenomen.

	Aantal ll.	Algebra		Vector meetk.		gonio		% 3 vakken	
		gem.	% vold.	gem.	% vold.	gem.	% vold.	vold.	onvold.
mavo	34	6,2	65	5,4	47	4,5	27	20	35
totaal	138	6,6	73	5,8	60	5,5	50	40	21

Enkele kanttekeningen

1 Het geconstateerde verschijnsel met betrekking tot de overgang mavo-mts/hts *kan* veroorzaakt worden door:

a het verschil in aantal uren wiskunde op de verschillende mavo-scholen. Dit varieert van 12 tot 20 totaal in vier leerjaren. Bij de aanname voor het vervolg onderwijs dient hier rekening mee gehouden te worden.

b het verschil in aantal lesuren op mts/hts.

2 Uit het bovenstaande blijkt, dat de leerling, die op normale wijze een mavo-methode heeft doorgewerkt, een goede aansluiting *kan* hebben op de methodes voor de mts.
3 Moeten we zo zwaar tillen aan de mening, dat wiskunde op de technische school zich meer ontwikkelt in technisch rekenen en als hulp bij de andere vakken?
4 De inhoud van de verschillende mts-methodes ontloopt elkaar niet veel.

5 Moet men de oorzaak werkelijk zoeken in de overschakeling van 6 vakken naar een groter aantal?
6 Is op grond van incidentele gevallen reeds een algemene conclusie gerechtvaardigd?
7 Het leerplan mts is verdeeld in een basis- en keuzeprogramma en is opgezet door een aantal mts-leraren in het betreffende vak. Het werk van een dergelijk leerplan-commissie is toe te juichen. Met de uitgave van dit leerplan algemene vakken hoopt de commissie, dat haar werk hiermee niet beëindigd is. Het zal nooit het stadium van 'definitief' mogen bereiken.
8 Doordat de hts-docent nog vasthoudt aan een indeling in algebra, analytische meetkunde, goniometrie en stereometrie zal het voor de mavo-leerling moeilijker zijn om aanpassing te vinden.
9 Is het meer vrije studieklimaat op de hts niet mede van invloed op de slechte studieresultaten?
10 Ontbreekt bij deze beste mavo-kandidaten de juiste studie-motivatie? Op de mavo lukte het wel zonder al te veel inspanning.
11 Moet er inderdaad van beide kanten geprobeerd worden de programma's op elkaar af te stemmen of blijkt het voorbereidend jaar van de hts geen haalbare zaak voor deze leerlingen?
12 In de onderbouw havo komen de modules-functies wel ter sprake, de mavo-leerling heeft hier nauwelijks iets van gehad. Hetzelfde geldt voor de hyperbool.
13 Is het juist, dat in de toekomst de weg naar het tertiaire onderwijs voor mavo-leerlingen uitsluitend en alleen via het havo moet lopen?
14 Hoe zal voor mts-ers in de toekomst een aanvullende opleiding geschapen worden in samenwerking met de havo-scholen, om zodoende tot de hts-'nieuwe stijl' toegelaten te kunnen worden?
15 Zijn er methodische en didaktische verschillen aan te wijzen bij het onderwijs in de wiskunde bij het mavo en mts/hts?
16 Wat kan men doen om de overgang voor de wiskunde vakken zo goed mogelijk te laten verlopen? Hebben de 'ontvangende' leraren hierin een even grote taak als de 'afleverende' leraar?

Literatuur

1 Leerplan algemene vakken mts 1972.
2 A. J. Pigmans - C. A. Jespers: Metrica, meetkunde voor de mts, Wolters-Noordhoff, Groningen.
3 A. J. Pigmans: Nieuwe Algebra voor de M.T.S., Wolters-Noordhoff, Groningen.
4 J. H. Toorman - W. A. Duvekot - J. E. Maas: Wiskunde, Techniek deel 1, Educa-boek, Culemborg.
5 P. Lauwen: Moderne wiskunde voor het middelbaar beroepsonderwijs, deel I, Nijgh en Van Ditmar, 's-Gravenhage/Rotterdam.
6 Ir. L. F. Cooke: Beleidsombuiging of bezuiniging, PT-aktueel, nr. 4, 1973, pag. 5 en 7, Stam, Den Haag.
7 Stuurcommissie H.T.O.: Beleidsombuiging of bezuiniging, PT-aktueel, nr. 6, 1973, pag. 6 PT-aktueel, nr. 7, 1973, pag. 5, Stam, Den Haag.
8 H.T.S.-unie: Beleidsombuiging of bezuiniging, PT-aktueel, nr. 8, 1973, pag. 9, Stam, Den Haag.
9 C.M.L.W.: Mavo-wiskunde in de kritiek, R.K. Mavoblad jrg. 25, nr. 7, pag. 140–141.

Nomenclatuur en geen einde*)

HANS FREUDENTHAL
Utrecht

Het is nog niet, het hoofd in de schoot leggen. Zolang er leven is, is er hoop en zolang er fouten worden gemaakt, is er rood potlood.

Allereerst het *oude* zeer:
In 3.1 is het verbod van een goede notatie ($\{x|A\}$) gelukkig geschrapt en ook de bewering dat schrijfwijze tot contradicties kan leiden. In 3.1 is verder een notatie die ik knetterfout noemde (en feitelijk notatie voor het bereik van een functie) geschrapt zonder dat er een vervangsel wordt aangewezen.
In 4.2 is het bij het voorschrijven van de door Vredenduin zelf (Euclides 47, 146) onuitroeibaar genoemde slordigheden gebleven. Misschien heeft de Nomenclatuurcommissie tengevolge van een drukfout in mijn eerste stuk niet begrepen wat er bedoeld was. Ik zie totaal niet in, waarom ze onuitroeibaar zouden zijn en probeer het dus nog eens.
Het begint al met de eerste alinea van 4.2. Het is dezelfde verwarring omtrent letters en variabelen die ik al meermalen bij de 'Nomenclatuur' heb gegispt en die door verschillende methoden voor de bovenbouw ijverig wordt gepropageerd. Wie de indruk wekt, 'dat letters verschillende functies kunnen hebben' is niet fout, zoals het Rapport beweert, maar heeft het bij het rechte eind, zoals iedereen weet. Maar daar gaat het hier niet om. De Commissie bedoelt heel iets anders, namelijk, dat variabelen op verschillende manieren gebonden kunnen worden, en zij beweert dat het onjuist zou zijn, dit de leerlingen aan te praten. Maar ook deze bewering is niet waar, zoals eveneens iedereen weet: variabelen kunnen bijvoorbeeld existentieel, universeel, verzamelingvormend, determinatief en interrogatief gebonden

*) Zie: Eerste Interimrapport van de nomenclatuurcommissie, Euclides 46 (1970-1971), 241-255.
Hans Freudenthal, Kanttekeningen bij de nomenclatuur, Euclides 47 (1971-1972), 139-140.
P. G. J. Vredenduin, Antwoord aan Freudenthal, Euclides 4 (1971-1972), 141-146.
Hans Freudenthal, Nog eens nomenclatuur, Euclides 47 (1971-1972), 181-192.
Eindrapport Nomenclatuurcommissie, Euclides 48 (1972-1973), 241-274.
Het krioelt van drukfouten in die stukken. De belangrijkste:
Euclides 47, blz. 139, 3e regel van no. 2: aa^2 ipv. aa^2, 4e regel van no. 2: (1, −1) ipv. (−1, 1).
Euclides 47, blz. 139, 4 v.o.: Vraagteken vervangen door zwevende komma.
Euclides 47, blz. 140, regel 2-1 v.o.: Die kanjer van een zetfout is in Euclides 47, 192 gecorrigeerd, echter met een nieuwe fout erin. Ik herhaal de correctie daarom:

Een functie van A naar B is een relatie die aan elk element van A precies één element van B koppelt.

Euclides 47, blz. 182, 13 v.o.: «rationale» ipv. «rationele».
Euclides 47, blz. 185, 1: «zelfs» ipv. «zelf».
Euclides 47, blz. 185, 10: twee keer «ε» ipv. «$\in$».
Euclides 47, blz. 187, 3e regel van no. 7: «O» ipv. «0».
Euclides 47, blz. 189, 4e regel van no. 9: «van $\mathbb{R}^+$ naar $\mathbb{R}$» ipv. «van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$».
Euclides 47, blz. 190, 3e regel van 11: accent vervalt.
Euclides 47, blz. 191, 4: accent vervalt.

worden. De x betekent dan resp.: sommige x, alle x, de verzameling van de x met . . ., dè x, welke x? In het laatste geval spreekt men van de 'onbekende' x, een volkomen toelaatbare spreekwijze, die door de Commissie wordt afgekeurd. Van hieruit redenerend komt de Commissie ertoe toe te laten (of - meen ik - zelfs te eisen) dat bij het vragen naar een oplossing *niet* erbij verteld wordt wie de onbekende is of wie de onbekenden zijn en in welke volgorde ze tot paar of tripel samengevat moeten worden. De voorbeelden, die de Commissie geeft, zijn ontoereikend, het zijn steeds maar vergelijkingen met *bepaalde* coëfficiënten en met onbekende x, y die volgens een ongeschreven wet alfabetisch moeten worden geordend. Hierop sloeg mijn voorbeeld $aa^2 = 1$ - is $(1, -1)$ er een oplossing van of $(-1, 1)$? Andere voorbeelden:
De oplossingen van

$$a^2 + 4ax + 4x^2 = 9$$

zien er anders uit naar gelang men als onbekenden aanwijst

x, of a, of (a, x) of (x, a).

Hoeft dit verschil niet te worden gemaakt, of mag het zelfs niet?

In 4.4 is er nu een zogeheten toelichting (blz. 251) bijgekomen, die treffender een verduistering zou kunnen worden genoemd. Men beweert het volgende en dat is eenvoudig niet waar:
«Men onderscheidt in de wiskunde de volgende vier, elkaar niet uitsluitende soorten afbeeldingen

afbeeldingen van V in W
afbeeldingen van V op W
afbeeldingen uit V in W
afbeeldingen uit V op W.»

In de 'wiskunde' kent men afbeeldingen van V in W en in zekere gevallen mag men dat 'in' in 'op' veranderen. De andere soorten afbeeldingen zijn 'in de wiskunde' volkomen onbekend. De Nomenclatuurcommissie heeft ze verzonnen, om er prat op te gaan dat zij het nu zo lekker eenvoudig zal maken - 'een dikke knoop doorhakken'.
De afbeeldingen ad 3 en 4 zijn door de Nomenclatuurcommissie gewoon uitgevonden. Ik heb de Nomenclatuurcommissie indertijd geadviseerd: als u dringend behoefte aan dit soort door u uitgevonden afbeeldingen (functies) hebt, dan kan ik u aan een naam ervoor helpen - zeg dan maar 'uit V in W'. De Nomenclatuurcommissie heeft dit cadeau geweigerd, om het, na nog een 'uit V op W' erbij te hebben gedicht, nu als wapen tegen mij te gebruiken.
In 4.4 is (thans blz. 252, 9-10) het fraais blijven staan:
«Met de functie f: $x \rightarrow f(x)$ van V naar W bedoelen we een functie waarvan het domein bestaat uit alle $x \in V$ waarvoor $f(x)$ betekenis heeft.»
En dit nadat Vredenduin (Euclides 47, 145) toegegeven heeft, dat het niet deugt en zelf de tekst gecorrigeerd had (Euclides 47, 144-145).
In 4.4 was als een van de twee voordelen van de tweede opvatting tegenover de eerste (die van de Commissie tegenover de gangbare) aangegeven, dat men volgens de tweede opvatting f en g vrijelijk kon samenstellen tot $g \circ f$, hetgeen volgens de eerste niet mogelijk zou zijn. Zoals ik uiteen heb gezet is dit onjuist; desalniettemin is de opmerking gehandhaafd. Zijn functies als speciale relaties gedefinieerd, dan is $g \circ f$ voor functies f, g in elk geval, of men het wil of niet, als relatie en dus als functie

gedefinieerd. Men mag alleen niet verwachten - zei ik - dat een functie van A naar B samengesteld met een van C naar D een van A naar D oplevert.
Het is sneu als er van de twee argumenten waarop de Nomenclatuurcommissie steunt er een onder weg wordt getrokken, maar kan dit een reden zijn om zo iets in de definitieve tekst te handhaven?
In 4.4 stond in het Interimrapport (Euclides 47, 254):
«Volgens de eerste opvatting zou de functie

$f: x \rightarrow \sqrt{x+2}$ van $[-2, \rightarrow\rangle$ naar $\mathbb{R}$

geen inverse hebben, maar wel de functie

$g: x \rightarrow \sqrt{x+2}$ van $[-2, \rightarrow\rangle$ naar $[0, \rightarrow\rangle$.»

Men zou verwachten dat hierop zou volgen wat met dezelfde functies bij de 'tweede opvatting' (die van de Nomenclatuurcommissie) het geval was, maar dit ontbrak in het Interimrapport. Het had kunnen zijn:
«Volgens de tweede opvatting hebben zowel f als g inverse functies en wel verschillende» en hierop had een uiteenzetting moeten volgen, waarom dit tegenover de eerste opvatting een voordeel was.
De Nomenclatuurcommissie heeft blijkbaar het gemis ook aangevoeld en heeft er nu de zinsnede aan toegevoegd
«Onze opvatting laat toe te zeggen: de functie

$f: x \rightarrow \sqrt{x+2}$ van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$

heeft als inverse de functie

$g: x \rightarrow x^2 - 2$ van $[0, \rightarrow\rangle$ naar $\mathbb{R}$».

Deze inlassing slaat als de tang op het varken en is bovendien foutief. Noch volgens de gebruikelijke nomenclatuur, noch volgens die van de Commissie kan de inverse van een functie van A naar B een functie van C naar D zijn, tenzij $B = C$ en $A = D$ is. Hiermee is dan ook de tweede steun voor de opvatting van de Commissie vervallen - van de twee benen heeft de Commissie er nu geen meer om op te staan. Bovendien geeft het te denken dat de Commissie telkens weer fouten maakt bij het manipuleren van haar eigen nomenclatuur.
Ik wil hiermee geenszins zeggen dat het voorstel van de Commissie omtrent 'functie van A naar B' onredelijk is. Het is, zoals het hier wordt aangeboden, onrijp. Men heeft er zich op vastgelegd eer men de consequenties ervan overzag. Toen die zich aandienden, was het te laat - men werd er door overspoeld. Het, naar het schijnt, noodlottige gevolg t.a.v. de inverse functie was gemakkelijk te voorkomen geweest, evenzo dat t.a.v. differentieerbaarheid. Het is nu een janboel geworden - kijk naar de talloze fouten in de boeken van de bovenbouw als gevolg van de 'Nomenclatuur'.

Nu een aantal nieuwtjes - ik heb maar oppervlakkig in de nieuwe hoofdstukken rondgekeken.
In 5.7 staat:
«De nulvector zouden we willen schrijven: **0**. Deze letter **0** wordt vet en romein (niet cursief) gedrukt omdat we hier met een constante te maken hebben.»
Dit is onjuist. De nulvector van een vectorruimte is geen constante - evenmin als het neutrale element van een groep, het maximum van een verzameling, het gemiddelde van een steekproef, de limiet van een rij, de integraal van een functie. Wel is 'nulvector van . . .', 'neutraal element van . . .' enz. een constante functor, maar zijn waardeverzameling bestaat uit meer dan één object.

In 6.1 wordt geëist dat men de gebruikelijke formulering 'f is continu' vervangt door: 'f is continu in zijn domein' en analoog voor 'f is differentieerbaar'. Het wordt zo maar 'aanbevolen' zonder enig argument. Wat zit er achter? Mag de lezer het niet weten? Waarom wordt het geheim gehouden?
Ik kan alleen maar gissen, en ik vermoed het volgende:
Volgens de toelichting van Vredenduin is het een van de consequenties van de nieuwe opvatting, dat elke functie nu differentieerbaar is. Vredenduin beschouwt dit als een enorme winst - ik noemde het een Pyrrhus-zege. Want hoe nu uit te drukken dat een functie differentieerbaar in de oude zin is? Je moet er een nieuwe term voor verzinnen en als zodanig heeft men blijkbaar de term 'differentieerbaar in zijn domein' opgegraven - hij is liefst vier lettergrepen langer dan de oude, maar vooruit dan maar! Om dit niet te gek te laten staan, heeft men dan ook aan 'continu' de aanvulling 'in zijn domein' toegevoegd. (Of is men erop uit ook de continuïteitsdefinitie zo te wijzigen, dat elke functie continu wordt?) In elk geval probeert men de gebruiker te helpen fouten te vermijden door hem een uitdrukkingswijze aan te praten, die niet toegelicht wordt en die niemand begrijpt - is dat nog wiskunde? Bovendien: wordt er niet door gesuggereerd dat een functie ook buiten zijn domein continu kan zijn? - een traditionele begripsverwarring.
In 6.4 wordt gedefinieerd:
«We noemen $f(a)$ een locaal extreem van $f(x)$ indien er een open interval I om a bestaat zo, dat $f(a)$ extreem is van het f-beeld van I.»
Vele lezers zullen direct aanvoelen dat hier iets niet klopt. Laten we de definitie op een voorbeeld loslaten. We nemen

$$f(x) = x^3 - 3x$$

en

$$a = -1,$$

dus

$$f(a) = 2.$$

Met bijvoorbeeld

$$I = \{x | -2 < x < 0\}$$

blijkt, dat 2 een extreem is van het f-beeld van I. Dus is 2 locaal extreem van f.
Laten we nu weer nemen

$$f(x) = x^3 - 3x$$

maar

$$a = 2,$$

dus weer

$$f(a) = 2.$$

Maar nu is

$$f'(a) = 9 > 0,$$

dus is er geen I te vinden rond a zodat het f-beeld van I het extreem 2 heeft. Dus is 2 geen locaal extreem van f - in strijd met de voorafgaande conclusie.
Waar zit hem de fout?
In de gegeven definitie zit een variabele a. Aangezien omtrent de binding ervan niets anders is gespecificeerd, moet de universele kwantor erop worden toegepast. Dit hebben we gedaan, met een noodlottig gevolg.
De zaak komt in orde als a existentieel wordt gebonden. 'Er is een a zodat . . .' (te weten $a = -1$) en hiermee is de kous af. Dat er ook a-waarden bestaan waarvoor het mis is, kan ons niets schelen.

Geheel bevredigend is dit ook niet. Bij definities als bovenstaande is het veeleer gebruikelijk de variabele a uit het definiens expliciet in het definiendum op te nemen, dus niet te definiëren '$f(a)$ is een locaal extreem', maar f bereikt (heeft) een locaal extreem bij a'. Zo is het vanouds geschied en er is niet de minste aanleiding om ervan af te stappen - zeker niet als het met fouten gepaard gaat.
De oude formulering 'f heeft een locaal maximum (minimum) bij a (te weten $f(a)$) indien voor alle x uit een geschikte omgeving van a geldt: $f(x) \geqq f(a)$ (resp. $f(x) \leqq f(a)$) is trouwens op zijn minst even goed, en als men het werkelijk modern wil maken, zegt men: f heeft een locaal extreem bij a indien voor een geschikte omgeving V van a de restrictie $f|_V$ een extreem bij a heeft.

Heel kort nog 6.5. Ik hoop dat we met de differentiaalvergelijkingen niet de weg zullen opgaan die door de Commissie wordt gesuggereerd. Moet de school werkelijk de rommel van een eeuw geleden oprapen die de universiteit lang geleden aan de uitdrager heeft meegegeven? Wat hier omtrent volledige oplossing en singulariteiten wordt aangeboden is zo intens ouderwets dat ik me afvraag 'waar haal je zoiets tegenwoordig vandaan?' Deze begrippen laten zich behoorlijk behandelen, maar dan in een context die zeker niet op de school thuis hoort.
Ik kan slechts aanbevelen de hele 6.5 te schrappen, anders komt dit ook nog in de boeken terecht.

Samenvattend:
Ik heb er geen bezwaar tegen als men in bestaande nomenclatuur wijzigingen aanbrengt. Maar:
als men een notatie verbiedt, dient men aan te geven wat er in plaats daarvan moet komen,
als men een bestaande notatie voor een ander doel annexeert, dient men een *volwaardige* vervanging te zorgen,
als een notatiewijziging naast positieve ook negatieve kanten heeft - hetgeen wel steeds het geval zal zijn - dient men die als zodanig te signaleren en niet als een vooruitgang aan te prijzen,
als een notatie in valkuilen leidt, dient men dit niet te verzwijgen, maar te signaleren - de talrijke fouten veroorzaakt door de 'Nomenclatuur' in de nieuwe methoden voor de bovenbouw spreken boekdelen -,
als men iets voorstelt, dient men het te motiveren en er niet rookgordijnen van geheimzinnige 'wetenschappelijke bezwaren' e.d. voor op te hangen,
als iets aangevallen wordt, dient men het redelijk te verdedigen of in te trekken.

Ik werk sinds jaren mee in verscheiden subcommissies betreffende wiskundige formules e.d. van de 'Deutsche Normenausschuss'. Ik heb het daar nog nooit beleefd dat men voorstellen hooghartig naast zich neerlegt. Integendeel, van alles wordt het voor en tegen zorgvuldig afgewogen en vooral: elke beslissing wordt zo gemotiveerd dat ook wie het er niet mee eens is, het gevoel krijgt, dat naar hem geluisterd is. Misschien ben ik door deze ervaringen wat verwend. In elk geval zou ik de Nomenclatuurcommissie deze procedure in overweging willen geven.

Enkele kanttekeningen bij het artikel 'Nomenclatuur en geen einde'.
1 Onbekende. In het voorlopig leerplan staat 'vergelijkingen met één veranderlijke'.

Dat is geen toeval. De subcommissie van de C.M.L.W. die de redactie opgesteld heeft, welke onder voorzitterschap stond van Prof. Dr. F. van der Blij, heeft expliciet de voorkeur gegeven aan 'veranderlijke' boven 'onbekende'. De nomenclatuurcommissie heeft zich hierbij aangesloten.

2 Freudenthal zegt geadviseerd te hebben desnoods te spreken over een functie uit V in W. Hij zegt verder, dat deze terminologie in de Nederlandse wiskundeliteratuur niet voorkomt.

Hij heeft echter geadviseerd (Euclides **47**, pag. 140) te spreken over een functie *van uit A naar B* (of uit A naar B). Voorzover ons bekend komt ook deze terminologie niet in de literatuur voor.

De nomenclatuurcommissie heeft gekozen voor: functie van A naar B. Welke terminologie in de literatuur (schoolboeken uitgezonderd) niet voorkomt.

Zullen we nu de strijdbijl maar begraven?

3 In de definitie van locaal extreem is inderdaad een incorrectheid geslopen. Hij moet zijn:

We noemen $f(a)$ een locaal extreem van $f(x)$ in a indien er een open interval I om a bestaat zo, dat $f(x)$ extreem is van het f-beeld van I.

De toevoeging 'in a' is in de slotredactie uitgevallen, waarvoor onze verontschuldigingen.

De Nomenclatuurcommissie

In het artikel 'Nomenclatuur en geen einde' vond ik de volgende zinsnede: 'Volgens de toelichting van Vredenduin is het een van de consequenties van de nieuwe opvatting, dat elke functie nu differentieerbaar is. Vredenduin beschouwt dit als een enorme winst'.

Ik kan met mijn hand op mijn hart verzekeren, dat mij hier woorden in de mond gelegd worden die niet van mij afkomstig zijn.

P. G. J. Vredenduin

Leraarsopleiding

P.G.J. VREDENDUIN

Oosterbeek

Hoe hard het nodig is, dat er een goede leraarsopleiding voor a.s. eerstegraads leraren komt, is me onlangs weer gebleken.
Ik was getuige van een les, die door een hospitant gegeven werd in een 2e klas atheneum.
Het was de laatste dag van zijn hospitium. Hieronder volgt een protocol van een deel van de les. Weggelaten is alleen het deel, dat betrekking had op het hanteren van de rekenliniaal.

Opgave. Vul in > of <.

$2\sqrt{21} \ldots . 9$

Ll (leerling). Ik ga $\sqrt{21}$ uitrekenen.
Lr (leraar). Kan toch niet. Hoe wil je dat doen?
Ll. Met de rekenliniaal.
Lr. Wendt zich tot een ander. Nu komt de oplossing:

$\sqrt{4}\sqrt{21} \ldots . \sqrt{81}$
$\sqrt{84} \quad \ldots . \sqrt{81}$

dus >.

Opgave. Vul in > of <.

$5 - 2\sqrt{6} \ldots . 0$

Het begin gaat normaal

$\sqrt{25} - \sqrt{4}\sqrt{6} \ldots . 0$

Nu komt er een vinger en de leraar maakt de gedachtengang niet af.
Ll. Maar je kan toch eerst 5 – 2 doen. Waarom is dat fout?
Lr. Wanneer mag je wortels aftrekken? Als ze gelijksoortig zijn.

$5\sqrt{6} - 2\sqrt{6}$ kan je dus wel aftrekken. Dit geeft $3\sqrt{6}$.
$5\sqrt{6} - 2\sqrt{5}$ kunnen we niet aftrekken.
$5\sqrt{1} - 2\sqrt{6}$ kan je dus niet aftrekken.

(U zult het niet geloven, maar op mijn erewoord: dit was de reden waarom je '5 – 2 niet mocht doen'.)
Nu ging het normaal verder:

$\sqrt{25} - \sqrt{24} \ldots . 0$

dus >.

Ll. Maar $\sqrt{25} - \sqrt{24}$ kunnen we niet aftrekken?
Lr (in paniek). Dan kijk je welke factoren erin zitten en dan gaat het wel.

Lr. We hebben de vorige keer gezien, dat

$$\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$$

(bij naslaan bleek me, dat het weglaten van de voorwaarde $a \geqslant 0$ en $b \geqslant 0$ aan Lr lag, want in het boek stond het goed).

Opgave. Bewijs dat $\sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{c} = \sqrt{abc}$
Oplossing van Lr.

$$\sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{c} = \sqrt{ab}\sqrt{c} \text{ (volgens het voorgaande)}$$
$$= \sqrt{abc} \quad \text{(idem)}$$

Ll. Ik heb beide leden gekwadrateerd.
Lr. Dat is fout . . . . kwadrateren zou omslachtig zijn . . . . neen, die stap mag je niet nemen.

Opgave. Bewijs $(\sqrt{a})^n = \sqrt{a^n}$
Oplossing gegeven door Lr. $(\sqrt{a})^n$ schrijven we

$$\sqrt{a}\sqrt{a}\sqrt{a} \ldots \sqrt{a} \ (n \text{ factoren})$$

Nu nemen we ze twee aan twee samen; er komt

$$\sqrt{aa}\sqrt{aa} \ldots$$

Daarna nemen we ze weer twee aan twee samen; er komt

$$\sqrt{aaaa} \ldots$$

Dit doen we n maal. Dan zijn we er.
Je moet er nog op letten, dat $a \geqslant 0$ en dat n een *geheel* getal is.
Hierna volgen nog enkele opgaven van het soort

$$(\sqrt{8})^3 = 8\sqrt{8}, \ (\sqrt{12})^5 = 144\sqrt{12}$$

waarna de klas opmerkt, dat je voor $\sqrt{8}$ nog wel $2\sqrt{2}$ en voor $\sqrt{12}$ en nog $2\sqrt{3}$ kan schrijven.

Ik geef toe, dat dit geval wel extreem is, maar het staat lang niet op zichzelf. Moeten we nu heus zo slecht voorbereide mensen op onze leerlingen loslaten. Of zou de opleiding grondig verbeterd kunnen worden? Ik hoop het laatste.

De opwindfunctie

A. MAASSEN
Arnhem

1 In Euclides 42 (1966/1967), pag. 246 e.v. heeft Van Dormolen gewezen op het nut van de opwindfunctie voor de creatie van sin en cos als functies van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$ (die in weerwil van het pleidooi van van Dormolen nog altijd 'goniometrische functies' heten). Sindsdien ben ik een van de vele dankbare gebruikers van de opwindfunctie.
Intuïtief is de zaak glashelder:
elke boog van die eenheidscirkel heeft natuurlijk een lengte; met enige handbewegingen en wat armgezwaai kunt u gemakkelijk aan toehoorders en toeschouwers duidelijk maken, wat het beeld is van een willekeurig reëel getal dat in het machien 'de opwindfunctie' wordt gestopt. De samenstelling van die opwindfunctie met de eerste coördinaatfunctie noem je dan: 'cos' en die met de tweede coördinaatfunctie: 'sin'.
(Daarmee bent u niet helemáál uit de moeilijkheden:
als uw leerlingen in vroegere meetkundelessen sin en cos als functies vanuit de verzameling van (de congruentieklassen van) hoeken hebben leren kennen, vragen zij - zoals u vurig gehoopt had - of dat nog iets te maken heeft met 'die dingen uit de meetkunde: ik bedoel sin 30° en zo'; en die leerlingen zult u een bevredigend antwoord moeten geven; en als u de trigonometrie start met die opwindfunctie, zult u uw leerlingen duidelijk moeten maken, wat verstaan wordt onder 'sin $\angle A$', 'cos 45°' e.d.; maar ook die problemen zijn gemakkelijk op te lossen.)
De vraag is, of na de constatering dat de zaak intuïtief glashelder is, de mathematicus geheel bevredigd is. Door de handbewegingen en het armgezwaai wordt een of andere afbeelding van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ bedoeld. Dàt er zo'n afbeelding is en maar één zo'n afbeelding, mag voor velen intuïtief duidelijk zijn, de vraag is of die intuïtie, nadat de bedoelingen van de handbewegingen en het armgezwaai geformaliseerd zijn, door de wiskunde wordt bevestigd.

2 In het universitair onderwijs is het niet ongebruikelijk de functies sin en cos (als functies vanuit de verzameling der complexe getallen) te creëren m.b.v. reeksen en in direct verband met de zgn. complexe e-macht.
Daarbij worden soms aan de eerstejaarsstudenten plaatjes voorgeschoteld, waarin het complexe getal $e^{i\varphi}$, zijnde: $\cos\varphi + i \sin\varphi$, - is het niet een beetje geraffineerd dat reële getal 'φ' te noemen? - gerepresenteerd wordt door een punt van de zgn. eenheidscirkel.
Voor de studenten wordt daardoor de suggestie die van de namen 'cos' en 'sin' uitgaat, als zouden die reeksen iets te maken hebben met de meetkundige dingen van die naam of met samenstellingen van de opwindfunctie met coördinaatfuncties, flink versterkt.
Dat is natuurlijk poppenkast! Allicht - zal de universitaire docent zeggen - plaatjes zijn altijd poppenkast.

Ik vind dat daarmee tekort wordt gedaan aan de trouvaille van de opwindfunctie.

3 Hoe de functies $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ook worden gedefinieerd, steeds zullen de volgende stellingen bewezen worden:

$\cos 0 = 1$; $\sin 0 = 0$;
$\cos' = -\sin$; $\sin' = \cos$.

Stel dat we die functies op een of andere exacte manier - bijv. m.b.v. reeksen - hebben gedefinieerd.
Even een afspraak:
voor elk reëel getal a, noteer ik de constante functie met $\mathbb{R}$ als domein:

$x \to a$ als volgt: $\bar{a}$.

Bekijken we de volgende differentiaalvergelijking: $y + y'' = 0$.

Stelling 1: Er is maar eén oplossing f die $\mathbb{R}$ als domein heeft en waarvoor geldt: $f(0) = f'(0) = 0$, te weten: $\bar{0}$.

Bewijs: Dat $\bar{0}$ zo'n oplossing is, is duidelijk. Als $f + f'' = \bar{0}$, dan $2f'f + 2f'f'' = \bar{0}$; en dan $f^2 + (f')^2$ is een constante functie. Als dan bovendien: $f(0) = f'(0) = 0$, dan: $f^2 + (f')^2 = \bar{0}$ en dan: $f = \bar{0}$.

Stelling 2: Als $a \in \mathbb{R}$ en $b \in \mathbb{R}$, dan is er maar één oplossing f die $\mathbb{R}$ als domein heeft en waarvoor geldt:
$f'(0) = a$ en $f(0) = b$, te weten: $x \to a \sin x + b \cos x$.

Bewijs: Dat die functie zo'n oplossing is, is duidelijk.
Als f zo'n oplossing is, dan geldt voor de functie

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to f(x) - a \sin x - b \cos x$:

g is een oplossing met $\mathbb{R}$ als domein en $g(0) = g'(0) = 0$. En dan: $g = \bar{0}$.

4 We gaan nu op zoek naar de opwindfunctie die we eerder met onze handbewegingen en ons armzwaaien bedoeld hebben.
We zoeken dus een afbeelding F vanuit $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ d.w.z. een geordend paar van functies f en g vanuit $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$

$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R} : F(x) = (f(x), g(x))$

met de volgende eigenschappen:

i $F(0) = (1, 0)$; d.w.z. $f(0) = 1$ en $g(0) = 0$.
ii F is een redelijk mooie functie; ik preciseer dat met: f en g zijn (ten minste) éénmaal differentieerbaar en f' en g' zijn continu.
iii $f^2 + g^2 = \bar{1}$: daaruit volgt: $ff' + gg' = \bar{0}$.
iv voor alle $x \in \mathbb{R}$: $\int_0^x ((f'(t))^2 + (g'(t))^2)^{\frac{1}{2}} dt = x$; dit is equivalent met: $(f')^2 + (g')^2 = \bar{1}$.

Ad i Zie het genoemde artikel van Van Dormolen.
Ad iii Natuurlijk!
Voor alle $x \in \mathbb{R} : F(x) = (f(x), g(x)) \in$ de eenheidscirkel.
Ad iv Dat opwinden willen we laten geschieden zonder dat de getallenlijn (locaal) wordt uitgerekt of (locaal) inkrimpt.
Ad ii Dat is een redelijke eis: de integraal, genoemd onder iv, bestaat dan zeker.

We merken op:
Als $a, b, p, q \in \mathbb{R}$ zó dat $a^2 + b^2 = p^2 + q^2 = 1$ en $ap + bq = 0$,
dan is er $\varepsilon \in \mathbb{R}$ zó dat $a = \varepsilon q$ en $b = -\varepsilon p$;
voor zo'n ε geldt dan: $1 = a^2 + b^2 = \varepsilon^2(p^2 + q^2) = \varepsilon^2$.

Voor de functies f en g waar we naar zoeken, geldt:
voor alle $x \in \mathbb{R}$: $f^2(x) + g^2(x) = f'^2(x) + g'^2(x) = 1$ en
$f(x)f'(x) + g(x)g'(x) = 0$.
Dus is er een functie $\varepsilon : \mathbb{R} \to \{-1, 1\}$
zó dat voor alle $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = \varepsilon(x) \cdot g'(x)$ en $g(x) = -\varepsilon(x) \cdot f'(x)$.
We kunnen nu bewijzen dat zo'n functie ε òf $\overline{-1}$ òf $\overline{1}$ is:
Noem $\{x \in \mathbb{R} \mid f'(x) \neq 0\}$ en $\{x \in \mathbb{R} \mid g'(x) \neq 0\}$: 'V' resp. 'W'.
Omdat f en g' continu zijn en $g'(x) \neq 0$ voor alle $x \in W$, is de restrictie van zo'n functie ε tot W continu op W, immers: voor alle $x \in W : f(x) = \varepsilon(x) \cdot g'(x)$;
bovendien is de restrictie van zo'n functie ε tot V continu op V.
We constateren dat zowel V als W open zijn, immers $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ is open en f' en g' zijn continu.
We constateren óók: $\mathbb{R} = V \cup W$, immers $f'^2 + g'^2 = \overline{1}$.
Zo'n functie ε is dus continu op $\mathbb{R}$!
En dus: zo'n functie ε is òf -1 òf $\overline{1}$.

Voor functies f en g waarnaar we zoeken, geldt dus:
òf: $f = g'$ en $g = -f'$, òf: $f = -g'$ en $g = f'$.
Daaruit volgt dat zulke functies f en g willekeurig vaak differentieerbaar zijn èn dat $f + f'' = g + g'' = \overline{0}$.
Voor functies f en g die voldoen aan de eisen i tot en met iv geldt dus:
$f + f'' = \overline{0}$ en $g + g'' = 0$
$f(0) = 1$ en $f'(0) = 0$ $g(0) = 0$ en $g'^2(0) = 1$
Dus op grond van stelling 2:
$f = \cos$ en: $g = \sin$ of $g = -\sin$.
We vinden dus twee opwindfuncties die aan de eisen i tot en met iv voldoen:
$F_1 = (\cos, \sin)$ en $F_2 = (\cos, -\sin)$
Van deze twee is F_1 de functie die we met onze handbewegingen en ons armgezwaai bedoelden.

5 Hiermee kunnen de plaatjes die aan eerstejaars wiskundestudenten worden voorgeschoteld vrij van 'poppenkast' worden gemaakt. Hiermee is bovendien de laatste vraag onder 1 met 'ja' beantwoord en dat doet mij als wiskundeleraar goed.

Met de woorden van prof. Freudenthal: 'er zijn elementaire en gemakkelijke bewijzen' mag ik (vooral) de differentiaalmeetkundigen onder de lezers van dit verhaal wellicht uitnodigen een gemakkelijk bewijs te geven.

Verscheidenheden

Prof. Dr. O. BOTTEMA
Delft

LXXXVIII *Russell vertaald*

In deze rubriek werd indertijd onder de titel *Wiskundigen over zichzelf*[1] een viertal autobiografiën besproken van wiskundigen uit de eerste helft onzer eeuw, namelijk van *G. H. Hardy, Wilhelm Blaschke, Norbert Wiener* en *Gerhard Kowalewski.* Hun geschriften, elk van een eigen aantrekkelijkheid, waren zo uiteenlopend van stijl, karakter, mentaliteit en openhartigheid (of haar tegendeel) dat opgemerkt kon worden dat begaafdheid vóór en neiging tot mathesis het enige bleek dat de auteurs gemeen hadden.

Sindsdien is de autobiografie verschenen van een man die een groot mathematicus was, maar bovendien door zijn activiteit op velerlei gebied een wereldbekende persoonlijkheid, een geniale maar ook een omstreden figuur, wiens inzichten en opvattingen in zijn lange leven nogal eens zijn gewisseld, die vereerd is en bewonderd, maar ook verguisd, die altijd heeft gestreefd naar vrede en harmonie voor zichzelf en een ieder, maar die als gevolg van overtuiging en temperament zijn lange leven lang door vele conflicten heen zijn weg heeft moeten en ook wel willen gaan. De drie delen van de autobiografie van Bertrand Russell[2] beschrijven een actief en veelzijdig leven, boordevol met *ups and downs* van intellectuele, maatschappelijke en emotionele aard. Hij is vrijmoedig in zijn uitingen over zichzelf en anderen, maar de openhartigheid wordt in balans gehouden door een aristocratische reserve. In op- en neergang is zelfverheffing en zelfbeklag hem verre. Het boek is geschreven in de heldere, eenvoudige maar nooit triviale stijl die hem in 1950 voor een ander geschrift *(Marriage and Morals)* de Nobelprijs voor literatuur deed toekennen (al worden bij deze onderscheiding, zoals men weet, politieke motieven niet altijd vermeden). Een boeiend en overrompelend boek, terecht een *bestseller.* En het is schier onbegrijpelijk dat het geschreven werd door een zeer oud man - Russel overleed in 1970 in zijn achtennegentigste levensjaar.

Bertrand Russell was mathematicus, maar zeer veel meer: filosoof, politicus, pacifist, literator, onderwijshervormer, moralist, agitator. Een leven vol tegenstelling en wending. In de Boerenoorlog aanvankelijk verdediger van het *empire,* midden in de eerste wereldoorlog aanmoedigend tot dienstweigering, cosmopoliet (maar: *'love of England is very nearly the strongest emotion that I possess'),* geestdriftig voor de Russische revolutie maar later gedesillusioneerd, met romantische en soms mystieke trekken maar ook een sceptisch en ironisch agnosticus, meer dan eens voor de rechter en in het gevang, ontslagen uit en weer hersteld in universitaire posities, ups and downs ook in het emotionele leven met meerdere huweliken en ongeregelde verbintenissen.

Een treffend symbool van zijn werk als mathematicus is zijn ontmoeting, als elfjarige,

[1] Verscheidenheden LXI, Euclides 41 (1965-66), 177-181.

[2] The autobiography of Bertrand Russell; Vol. I, 1872-1914 (1967); II, 1914-1944 (1968); III, 1944-1967 (1969).

met Euclides: hij wordt hartstochtelijk meegesleept maar heeft al dadelijk onvrede met de axioma's. Hij studeert wiskunde in Cambridge, legt zich later onder invloed van Peano toe op de studie der grondslagen en de mathematische logica, schrijft in de eerste helft van zijn leven twee klassieke werken *The principles of mathematics* (1903) en samen met *Whitehead* in een acht jaren durende intensieve samenwerking de *Principia Mathematica* (1910-1913). Merkwaardig is de relatie tussen deze twee zo zeer verschillend geaarde mannen. Ook over Whitehead hebben wij autobiografische informatie[3]; hij komt daarin de lezer voor als een evenwichtige, zachtmoedige en irenische figuur - volgens Russell zou dit een façade zijn geweest waarachter zich drift en onzekerheid verscholen.
Met twee van de vier eerder genoemde mathematici heeft Russell veel contact gehad. Norbert Wiener ging na zijn promotie op negentienjarige leeftijd van Harvard naar Europa om bij Russell verder te studeren. De jongeling uit het puriteinse New England had wel wat moeite met de libertijnse denkbeelden van zijn mentor. Hij schrijft met bewondering over diens brillante colleges, wat hem niet verhindert de leermeester oneerbiedig te vergelijken met de caricaturale Mad Hatter uit Alice in Wonderland. Geheel anders is de relatie met Hardy; toen Russell in 1915 als lecturer in Cambridge werd ontslagen koos Hardy zijn partij en hij bevorderde later de rehabilitatie. Wat er zich destijds binnenskamers heeft afgespeeld is een halve eeuw later, twintig jaar na de dood van Hardy, in een posthuum geschrift publiek geworden.[5]
De direkte aanleiding tot dit opstel was de herlezing van de eerste twee delen der autobiografie in de nederlandse vertaling,[6] die wij als een uitstekende prestatie beschouwen. Voor het levendige proza van Russell zijn goede equivalenten gevonden. In het oorspronkelijke werk zijn behalve de eigenlijke tekst een groot aantal brieven ván maar ook áán de auteur opgenomen, uiteraard in zeer verschillende stijl geschreven. Het valt op dat in de vertalingen daarvan de persoonlijke geaardheid van de afzenders bewaard is kunnen blijven.
In de autobiografie komen weinig wiskundige vaktermen voor, gelukkig voor de vertalers die bij dergelijke passages goed zouden hebben gedaan een deskundige te raadplegen. Zo had *centre of gravity* (Vol. I, p. 47 = dl. I, p. 51) beter eenvoudig met zwaartepunt dan met 'centrum van de zwaartekracht' vertaald kunnen worden. De enige ontsporing die wij opmerkten heeft plaats (Vol. II, p. 191 = dl. II, p. 246) als in 1932 Russell tijdens een van zijn depressies afleiding zoekt bij de configuratie der rechten op een oppervlak van de derde graad: 'purely to afford myself distraction I worked on the problem of the twenty-seven straight lines on a cubic surface'; de vertalers zijn er hier wel erg naast met hun 'kubusvormig oppervlak'. Zij zijn overigens in goed gezelschap: toen de dichter M. Nijhoff *The Tempest* had vertaald kreeg hij aanmerkingen van een zeeman omdat hij scheepstermen uit het eerste tafreel niet juist had weergegeven.[7]
Wie de autobiografie van Russell leest ontmoet een geniaal man wien niets

[3] A. N. Whitehead, Essays in science and philosophy, (1947), Part I - Personal, 3-74.
[4] N. Wiener, Ex-prodigy, my childhood and youth (1953), 191-195.
[5] G. H. Hardy, Bertrand Russell and Trinity (1970).
[6] Bertrand Russell, Autobiografie, 1872-1914 (1968), 1914-1944 (1970).
[7] De Gids, 92 (1928), 121-124.

menselijks vreemd is, maar bij wie alles, de idealen, de vreugden, de teleurstellingen grotere proporties hebben dan bij de gewone sterveling, die zich dan ook niet aan hem kan spiegelen. Daarom wagen wij het, in dit tijdschrift voor wiskundigen, te eindigen met twee uitspraken van hem over ons vak, de ene uit 1931 (Vol. II, p. 160) 'The best years of my life were given to the Principles of Mathematics, in the hope of finding somewhere some certain knowledge. The whole of this effort, in spite of three big volumes, ended inwardly in doubt and bewilderment' en die andere, aan het einde van zijn leven (Vol. III, p. 222): 'I set out with a more or less religious belief in a Platonic eternal world, in which mathematics shone with a beauty like that of the last cantos of the Paradiso. I came to the conclusion that the eternal world is trivial and that mathematics is only the art of saying the same thing in different words'.

Toelichting op het examenprogramma voor de akte wiskunde L.O.

Inleiding

Na de publikatie in Staatsblad 313 van het Besluit van 1 juli 1969, houdende wijziging van het Examenbes uit lager onderwijs wiskunde, heeft de examencommissie ten behoeve van opleiders en kandidaten een uitvoerige toelichting op het examenprogramma gepubliceerd Zie voor deze toelichting 'Euclides', februari 1970 en 'Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde', jaargang 1969–1970, aflevering 1.
Nu een aantal jaren ervaring is opgedaan met examens volgens het nieuwe programma en verscheidene leerboekenseries voor het VWO hun voltooiing hebben bereikt, acht de examencommissie het gewenst, met het oog op de examens in 1974 en volgende jaren, een nadere toelichting ten behoeve van opleiders en kandidaten te doen verschijnen
Het examenprogramma vertoont ten aanzien van de onderdelen analyse en meetkunde een zodanige overeenkomst met het eindexamenprogramma VWO voor de vakken wiskunde I en wiskunde II, dat de leerboeken voor deze vakken geschreven een belangrijke functie kunnen vervullen bij de studie voor de akte wiskunde l.o. Daar deze boeken niet voor een lerarenopleiding zijn geschreven, verdient het aanbeveling aan sommige onderwerpen een meer diepgaande studie te wijden. Voor een indruk van het niveau waarop deze onderwerpen op het examen aan de orde komen wordt verwezen naar de leerboeken 'Nieuwe Wiskunde' I en II van drs. E. J. Wijdeveld

Analyse

Het examenprogramma VWO wiskunde I bevat een aantal onderwerpen die niet in het examenprogramma wiskunde l.o. voorkomen.
Als zodanig worden hier vermeld: cyclometrische functies, partiële integratie, oneigenlijke integraal, differentiaalvergelijkingen, inleiding tot de waarschijnlijkheidsrekening en de mathematische statistiek. Deze worden hier genoemd om aan te geven dat bij gebruik van VWO-leerboeken deze onderwerpen kunnen worden overgeslagen. Daarentegen wordt het onderwerp rijen en reeksen wel genoemd in het programma wiskunde l.o. maar niet in het VWO-programma.

In het algemeen wordt in de VWO-leerboeken niet in die mate aandacht geschonken aan fundamentele onderwerpen zoals verzamelingen, logica, relaties en functies, getallenverzamelingen, als voor een aanstaand leraar wenselijk mag worden geacht. Voor bestudering van deze onderwerpen wordt verwezen naar 'Nieuwe Wiskunde' I en II. Behalve dat zij op het schriftelijk examen aan de orde kunnen komen, krijgen zij bijzondere aandacht op het mondeling examen bij het onderdeel 'Wiskundige grondbegrippen'. Belangrijke begrippen als limiet, continuïteit en differentieerbaarheid dienen terdege te worden bestudeerd. Ook niet-continue functies moeten de aandacht hebben, zoals de hieronder genoemde entier-functie: $x \rightarrow E(x)$.

Aanbevolen wordt als toepassing van de begrippen reëel getal en continuïteit bijvoorbeeld de volgende stelling, een bijzonder geval van een meer algemene stelling, te bewijzen:

Als f is een functie van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$ en

$a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, a < b, f(a) < 0, f(b) > 0$ en

f is continu en stijgend in $[a, b]$,

dan $\exists c \in \langle a, b \rangle : f(c) = 0$.

Men vergelijke in dit verband eens de functies

$x \rightarrow x + \ln x$ met domein $[e^{-1}, 1]$ en

$x \rightarrow E(x) + x + \frac{1}{2}$ met domein $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

Bij wortelfuncties kan men zich beperken tot functies waarbij in het functievoorschrift slechts vierkantswortels uit rationale vormen voorkomen.

De goniometrische functies kunnen worden gedefinieerd met behulp van een afbeelding van $\mathbb{R}$ op de eenheidscirkel.

De behandeling van de logaritmische en de exponentiële functies loopt in de leerboeken uiteen. Aanbevolen wordt, ook wanneer men in een vroeger stadium de logaritmeneming als omkering van de machtsverheffing (met rationale exponent) heeft leren kennen, de natuurlijke logaritme te definiëren als $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt$, waarna men de exponentiële functie als inverse van de logaritmische functie kan invoeren.

Ook de rijen als functies van $\mathbb{N}^+$ naar $\mathbb{R}$, verdienen de aandacht. Zij kunnen bijvoorbeeld een rol spelen bij het definiëren van de begrippen reëel getal en limiet van een functie. Hoewel van een algemene behandeling geen sprake kan zijn, dient toch gewaakt te worden tegen het postvatten van de mening dat er slechts meetkundige en rekenkundige rijen en reeksen bestaan. Zo kan men naast de convergentie van de machtreeks $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ ook die van de machtreeks $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ onderzoeken. Algemene convergentiekenmerken behoren niet tot het programma; het convergentiekenmerk voor een meetkundige reeks echter moet de kandidaat correct kunnen afleiden.

Met het oog op berekeningen in de analyse en de meetkunde moet de kandidaat met een rekenliniaal en met tabellen zoals een logaritmentafel en goniometrische tafels kunnen omgaan, waarbij hij de nauwkeurigheid van de verkregen uitkomsten moet kunnen aangeven.

De bestudering van de determinanten kan beperkt blijven tot die van de tweede en de derde orde. Zij vinden toepassing bij het oplossen van stelsels eerstegraads vergelijkingen.

Meetkunde

In het algemeen is de behandeling van de meetkunde met vergelijkingen en vectoren in de VWO-boeken toereikend voor de studie voor de akte wiskunde l.o. Slechts indien het uitwendig product niet behandeld wordt, is aanvulling nodig, daar het examenprogramma kennis van dit onderwerp voorschrijft. De vectormeetkunde mag niet ontaarden in goochelen met formules; de meetkundige interpretatie van de gebruikte vergelijkingen moet de kandidaten goed voor ogen staan. Daarvoor is kennis van een aantal planimetrische en stereometrische eigenschappen onontbeerlijk.

De meetkunde wortelt in de aanschouwing. In een intuïtieve inleiding kunnen de objecten van de meetkunde, zoals punten, lijnen, vlakken, begrippen zoals lengte, oppervlakte, inhoud, en relaties zoals evenwijdigheid en loodrechte stand, aan de orde worden gesteld. Een overzicht van de hieruit te ontwikkelen basisleerstof wordt hieronder gegeven. Een axiomatische opbouw van deze meetkunde wordt niet gevraagd.

Bij de ontwikkeling van deze meetkunde spelen afbeeldingen een belangrijke rol. Men kan zich beperken tot de afbeeldingen die bijvoorbeeld in 'Nieuwe Wiskunde' II, hoofdstuk 7, worden behandeld in de paragrafen Congruentietransformaties en Gelijkvormigheidstransformaties.

Zodra deze basisleerstof aangebracht is, kan de structurering van de meetkunde met de axioma's van een vectorruimte tot stand gebracht worden. Het is noodzakelijk dat de kandidaten kennismaken met een deductief systeem. Daarbij kan men zich beperken tot R_2 en R_3.
Het is een vraag van methodisch-didactische aard of men de opbouw volgens de analytisch-meetkundige methode simultaan moet laten verlopen met een wellicht meer abstracte opbouw van de meetkunde met vectoren. In ieder geval is het noodzakelijk de meetkunde zowel met vectoren als met vergelijkingen te behandelen.

Overzicht van de basisleerstof voor meetkunde.
Punt, lijn en vlak; onderlinge ligging van punten, lijnen en vlakken.
Hoek; graad en radiaal; de hoek van twee lijnen, van lijn en vlak, van twee vlakken.
De goniometrische verhoudingen sin, cos en tan.
Afstand; de afstand van twee punten, van twee lijnen, van twee vlakken, van punt en lijn, van punt en vlak, van lijn en vlak.
Afbeeldingen: lijnspiegeling, puntspiegeling, translatie, schuifspiegeling, rotatie, vermenigvuldiging; samenstellen van afbeeldingen.

De begrippen congruent en gelijkvormig.
Driehoeken; eigenschappen van driehoeken; oppervlakte; de merkwaardige lijnen: hoogtelijnen, zwaartelijnen, deellijnen, middelloodlijnen; hoogtepunt en zwaartepunt.
De stelling van Pythagoras; sinusregel en cosinusregel.
Vierhoeken; vlieger, trapezium, parallellogram, ruit, rechthoek, vierkant; eigenschappen van vierhoeken; oppervlakte.
Cirkel; cirkel en lijn, cirkel en hoek, cirkel en driehoek; de formules $a = 2R \sin \alpha$ en $O = rs$; cirkel en vierhoek; omtrek en oppervlakte van de cirkel.
Lichamen; prisma, balk, kubus, piramide; vlakke doorsnijdingen van deze lichamen; cilinder, kegel, bol; oppervlakte en inhoud; lijn en bol, vlak en bol, viervlak en bol.
Puntenverzamelingen in R_2 en R_3, zoals

$d(X, A) = d(X, B)$	: middelloodlijn of middelloodvlak,
$d(X, a) = d(X, b)$ en $a // b$	: middenparallel (loodvlak),
$d(X, a) = d(X, b)$ en a snijdt b	: twee deellijnen of twee deelloodvlakken,
$d(X, A) = p$	: cirkel of bol,
$d(X, a) = p$	: twee afstandslijnen of cilinder,
$d(X, \alpha) = d(X, \beta)$ en $\alpha // \beta$	: in R_3: middenparallelvlak,
$d(X, \alpha) = d(X, \beta)$ en α snijdt β	: in R_3: twee deelvlakken,
$d(X, \alpha) = p$	: in R_3: twee afstandsvlakken.

Eenvoudige lijnenverzamelingen zoals

x door A en x snijdt a,	x door A en $\angle(x, a) = \varphi$,
x door A en $x \perp a$,	x door A en $\angle(x, \alpha) = \varphi$,
x door A en $x // \alpha$,	x door A en $d(x, B) = p$ met $d(A, B) > p$,
x snijdt a en $x // b$,	x door A en $d(x, a) = p$ met $d(A, a) > p$,
	x door A en $\angle(x, a) = \angle(x, b)$,
	x door A en $\angle(x, \alpha) = \angle(x, \beta)$.

Bundels: lijnenbundel, cirkelbundel, vlakkenbundel, bollenbundel.

Meetkunde met vectoren en vergelijkingen.
Vector; optellen en aftrekken, nulvector, vermenigvuldigen met een scalar.
Vectorruimte; basis, lineaire afhankelijkheid en onafhankelijkheid van een stelsel vectoren.
Vectoren in een coördinatenstelsel. Determinanten met betrekking tot het al of niet afhankelijk zijn van een stelsel vectoren.
Midden van een lijnstuk, deelverhouding op een lijnstuk, zwaartepunt van een driehoek.
Lijn; vectorvoorstelling, vergelijking; lijnenbundel.
Vlak; vectorvoorstelling, vergelijking; vlakkenbundel.
Inwendig product van twee vectoren, eigenschappen van het inwendig product; hoek van twee vectoren.

Orthonormale basis van vlak en ruimte, eenheidsvectoren, lengte van een vector, afstand van twee punten. Normaalvector van lijn en vlak; normaalvergelijking van lijn en vlak; afstandsberekeningen; hoekberekeningen.
Cirkel en bol; vectorvoorstelling, vergelijking; cirkelbundel, bollenbundel; snijpunten, snijcirkel, raaklijnen, raakvlakken.
Parabool; vergelijking, brandpunt en richtlijn, raaklijn, normaal, snijpunten met lijn en cirkel.
Verzamelingen van punten en lijnen.
Uitwendig product van twee vectoren; eigenschappen van het uitwendig product; oppervlakte van parallellogram en driehoek; inhoud van blok en viervlak.
Afbeeldingen van R_2 naar R_2 en daarmee corresponderende afbeeldingen van een bij R_2 behorend vectorvlak naar zichzelf: translatie, rotatie om de oorsprong, spiegeling in een lijn door de oorsprong, vermenigvuldiging ten opzichte van de oorsprong, loodrechte projectie op een lijn door de oorsprong; lineaire afbeeldingen, orthogonale lineaire afbeeldingen, isometrieën.
Beschrijving van reguliere en singuliere lineaire afbeeldingen en hun samenstellingen met behulp van de coëfficiëntenmatrices van de afbeeldingsvergelijkingen; kern en bereik van lineaire afbeeldingen; de groep van reguliere lineaire afbeeldingen.
Determinanten in verband met deze coëfficiëntenmatrices.

Diepgaande bestudering van bovengenoemde afbeeldingen kan de kandidaat voldoende inzicht geven in enkele wezenlijke aspecten van de afbeeldingsmeetkunde. De kandidaat is nu in staat een uitspraak als 'twee punten die niet met de oorsprong op één lijn liggen en hun beeldpunten bepalen juist één lineaire afbeelding van R_2 naar R_2' correct te onderzoeken.
Ter beperking van de leerstof zullen afbeeldingen van R_3 naar R_3 niet op het examen worden gevraagd.

Wiskundige grondbegrippen

Voor de omschrijving van de leerstof van dit onderdeel verwijst de examencommissie o.a. naar 'Nieuwe Wiskunde' I en II.
De in deze boeken behandelde onderwerpen zijn:
Deel I: 1 Axioma's.
2 Verzamelingen.
3 Logica.
4 Relaties, functies.
Deel II: 5 Getalverzamelingen.
6 Groepen, ringen, lichamen.
7 Transformaties.
Verscheidene onderwerpen die in deze boeken aan de orde komen worden ook in de VWO-leerboeken behandeld. Een bestudering van 'Nieuwe Wiskunde' naast de VWO-leerboeken (niet daarna!) wordt dringend aanbevolen. Voor de onderwerpen vectoren en afbeeldingen (in het examenprogramma nog transformaties genoemd) wordt naar de VWO-leerboeken verwezen.
Een begrip dat een groot aantal ogenschijnlijk verschillende onderwerpen onder één gezichtspunt brengt, is het groepsbegrip. Het al of niet gesloten zijn van een verzameling onder een bepaalde bewerking heeft reeds bij de behandeling van de uitbreiding van een getalbegrip een belangrijke rol gespeeld, terwijl ook de begrippen neutraal element, inverse, associatief en commutatief aan de orde kwamen. Deze begrippen behoeven echter niet beperkt te blijven tot getallenverzamelingen, maar zij kunnen ook met betrekking tot vele andere verzamelingen worden gehanteerd.
Bij het onderzoek van de structuur van eindige groepen van niet te grote orde kan men veel steun ondervinden van groepstabellen. In sommige modellen of tabellen kan men gemakkelijk ondergroepen herkennen. De groepen van de orde vier lenen zich voor een interessant onderzoek.
Voor omvang en niveau wordt verwezen naar hoofdstuk 6, paragraaf 6.2. Men beperke zich tot eenvoudige opgaven die in direct verband met 6.2 kunnen worden opgelost. Bij de begrippen ring en lichaam kan men zich tot de getallenverzamelingen beperken. Men vermijde probleemstellingen, die het accent zouden verleggen naar een onderzoek van de abstracte structuur. Het is de bedoeling dat de kandidaten in vele modellen uit de algebra en de meetkunde isomorfe structuren herkennen en dan in staat zijn deze onder te brengen in één van de bestudeerde systemen.

Het ligt voor de hand de meetkundige afbeeldingen eveneens in dit licht te beschouwen. Zo geeft bijvoorbeeld de beschrijving van afbeeldingen van het vlak naar zichzelf met behulp van de coëfficiëntenmatrices van de afbeeldingsvergelijkingen aanleiding tot een onderzoek van de reguliere 2X2-matrices die onder de bewerking samenstelling een, in het algemeen niet-commutatieve, groep vormen. Hierin kunnen verschillende ondergroepen worden aangewezen zoals de draaiingen om *O*, deze samen met de spiegelingen t.o.v. een lijn door *O*, de vermenigvuldigingen.

Didactiek en Methodiek

De commissie ziet de studie voor dit examenonderdeel niet als een garantie voor het geven van goed onderwijs, maar als een noodzakelijk middel om de oriënterende periode, die ieder beginnend leraar moet doormaken, te bekorten.
Aan de hand van een gesprek met de kandidaat zal getracht worden te beoordelen of deze zich voldoende heeft voorbereid op het geven van onderwijs in de wiskunde.
De commissie onderscheidt in de examenstof drie onderdelen.

A Kennis van en inzicht in het leerplan en een leergang voor wiskundeonderwijs op een van de schooltypen waarvoor de akte wiskunde l.o. onderwijsbevoegdheid geeft.
Van de kandidaat wordt verlangd dat hij een globaal overzicht kan geven van het betrokken leerplan en voorts
  a algemene kennis heeft van de wiskundige opbouw en structuur van de bestudeerde leergang en - zo mogelijk - eveneens van de aan de methode ten grondslag liggende onderwijskundige principes (methodisch-didactische en/of psychologische);
  b deze kennis gedetailleerd kan demonstreren aan de hand van een door de kandidaat verrichte analyse van een tweetal onderwerpen, die de methode 'verticaal doorsnijden' zoals:
  taal van de wiskunde, relaties en functies, afbeeldingsmeetkunde, verzamelingen, vergelijkingen, ongelijkheden, roostermeetkunde, uitbreiding van het getalbegrip, bewijsmethoden, enz.
  Het wordt door de commissie op prijs gesteld als de kandidaat deze analyse verricht voor eenzelfde onderwerp uit twee verschillende leergangen. In dit geval kan de kandidaat zich tot één onderwerp beperken.
  Een schriftelijke neerslag van de voor dit onderdeel verrichte studie kan op het examen worden overgelegd; zie ook C.

B Didactische werkvormen in het wiskunde-onderwijs.
Van de kandidaat wordt verlangd, dat hij bekend is met verschillende didactische werkvormen, zoals: doceermethode, socratische methode, leergesprek, vormen van groepswerk en individuele werkmethoden als wiskunde-practicum, werken met opdrachtkaarten, geprogrammeerde instructie, enz. De kandidaat dient daarbij de mogelijkheden om deze werkvormen toe te passen op de onder A genoemde leergang te kunnen toelichten, bij voorkeur ten aanzien van de door hem bestudeerde onderwerpen (zie A).

C Overige onderwerpen uit theorie of praktijk van het wiskundeonderwijs.
Uit de ervaringen van de examencommissie is gebleken, dat een examen in het onderdeel didactiek het meest zinvol verloopt als de kandidaat een verslag van een praktisch of theoretisch onderzoek overlegt. Gedacht wordt hierbij aan een verslag van een aantal gegeven lessen, een scriptie over een verricht theoretisch onderzoek, dat op de didactiek van de wiskunde betrekking heeft, een door de kandidaat geproduceerd wiskundepracticum, enz. Mede gezien de huidige ontwikkeling van het rekenonderwijs op de basisschool naar een meer modern wiskundig georiënteerd onderwijs - waarover inmiddels al veel publikaties zijn verschenen - bestaat voor verscheidene kandidaten de mogelijkheid van een aantal door henzelf gegeven wiskundelessen een verslag op te stellen.
Van kandidaten, die de hierboven genoemde mogelijkheid tot het geven van lessen niet bezitten, stelt de commissie enige schriftelijke neerslag van de onder A tot en met C verrichte studie zeer op prijs.
Ook laat de commissie gaarne ruimte open voor verslagen van onderzoeken van specifieke onderwerpen binnen het wiskundeonderwijs, bijvoorbeeld op het gebied van leerpsychologie, onderwijstechnologie, doelstellingsonderzoek, toetsingsmethoden. Tenslotte beveelt de commissie enige literatuurstudie aan,

ter keuze van de kandidaat, bijvoorbeeld enkele hoofdstukken uit boeken, genoemd in de hierna volgende lijst.

Literatuurlijst didactiek

ALGEMEEN:
1 De Groot, Vijven en zessen, Groningen.
2 De Groot en Van Naerssen, Studietoetsen afnemen, construeren en analyseren, Den Haag.
3 Knoers, Algemene onderwijskunde voor het voortgezet onderwijs, Assen.
4 Van Parreren, Leren op school, Groningen.

BASISONDERWIJS:
5 Dienes-Golding, De eerste stappen in de wiskunde: Logica en logische spelen; Verzamelingen, getallen, machten; Wij bouwen de wiskunde op; De eerste stappen in de wiskunde, Den Bosch.
6 Nuffield Mathematics Project: Teachers Guides, Londen.
(Enkele delen zijn vertaald en verschenen bij Wolters-Noordhoff).

VOORTGEZET ONDERWIJS:
7 Chapman e.a., The process of learning mathematics, Oxford.
8 Van Dormolen, Voorbeeld van een lesvoorbereiding, Ned. Ver. van Wiskundeleraren, Niet in de handel.
9 Johnson and Rising, Guidelines for Teaching Mathematics, Belmont, California.
10 Polya, How to solve it, New York (pocketuitgave).
11 Polya, Mathematical Discovery (2 delen), Londen.
12 Skemp, The Psychology of Learning Mathematics, (Penguin Book).
13 Wansink, Didactische Oriëntatie voor Wiskundeleraren (3 delen), Groningen.
14 Van Hiele, Begrip en inzicht, Muusses, Purmerend.

15 Verschillende artikelen in 'Euclides', Wolters-Noordhoff.
16 Verschillende uitgaven van CMLW/IOWO, Utrecht, zoals:
Toelichting op het leerplan wiskunde (brugklas).
Idem (mavo, onderbouw havo en vwo).
Verslag van het mavo-ontwikkelteam.
Wiskobas Bulletin (wiskunde op de basisschool).
Ma-tema-tika, Handboek heroriëntering onderwijzers.
Kans voor het onderwijs, drs. F. Goffree.
Wiskunde L.B.O., Brochure 1973.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Agenda van de jaarvergadering op zaterdag 27 oktober 1973 in het gebouw van de Koninklijke Nederlandse Jaarbeurs, Croeselaan 6 te Utrecht

Aanvang 10.30 uur

1 Opening door de voorzitter, dr. J. K. van den Briel

2 Notulen van de algemene vergadering 1972[1])

3 Jaarverslagen[1])

4 Décharge van de penningmeester en benoeming van de nieuwe kascommissie

5 Bestuursverkiezing wegens periodiek aftreden van drs. J. van Dormolen en M. Kindt
Het bestuur stelt beide aftredenden kandidaat
Het bestuur stelt L. Bozuwa kandidaat ter uitbreiding van het bestuur

6 Vaststelling van de contributie 1974/75
In verband met de verhoging van de abonnementsprijs van 'Euclides' stelt het bestuur voor de contributie te verhogen tot *f* 25,–.

7 Splitsing van de vergadering in twee delen
7.1 Voordracht van prof. dr. Th. Bezembinder
'Psychologie, statistiek en wiskunde'
7.2 Voordracht van P. Kalmijn
'Wiskunde in het dagelijks leven'

Pauze

8 Voordracht van prof. dr. H. C. Hamaker
'De toepassing van de kansrekening en statistiek bij de beoordeling van kansspelen'

9 Activiteiten van de vereniging

10 Rondvraag

11 Sluiting

Toelichting bij punt 9, activiteiten van de vereniging.

De recente groei van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren (van ca. 700 leden in 1968 tot ca. 1800 leden in 1973) is gepaard gegaan met een niet-stijgen van het aantal bezoekers van de jaarvergaderingen.
Het bestuur vindt deze ontwikkeling onbevredigend en wil in verband hiermee graag een discussie op gang brengen over de volgende punten:

a. De activiteiten van de NVvW zouden in toenemende mate kunnen worden geregionaliseerd, bij voorbeeld door het instellen van regionale werkgroepen.

b. Naast of in plaats van regionale werkgroepen zou de oprichting van thematische werkgroepen kunnen worden bevorderd.

c. In andere vorm zal de jaarvergadering wellicht meer belangstelling wekken. Ideeën die hierover in het bestuur leven, zijn:
1. het inbedden van de jaarvergadering in een 2-daagse conferentie.
2. het inbedden van de jaarvergadering in een thematische dag.
Bovendien verdient het overweging om de jaarvergadering jaarlijks in een andere plaats te houden.

[1]) Hierna geplaatst.

Verslag van het verenigingsjaar 1 augustus 1972-31 juli 1973

Het bestuur was dit jaar als volgt samengesteld: voorzitter dr. J. K. van den Briel, secretaris drs. J. W. Maassen, penningmeester drs. J. van Dormolen, L. van Beek, M. Kindt, L. A. G. M. Muskens, dr. P. G. J. Vredenduin.

Op 16 en 17 augustus werd te Amsterdam en op 17 en 18 augustus werd te Eindhoven de vakantiecursus van het Mathematisch Centrum gehouden met als onderwerp: 'Grafentheorie en haar toepassingen'. De Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren was vertegenwoordigd in de adviescommissie.

Van 29 augustus tot 2 september werd te Exeter het I.C.M.E.-congres gehouden. De vereniging heeft aan belangstellende leden subsidie voor dit congres verleend.

Op 9 september werd te Utrecht een forumbijeenkomst gehouden over de wiskunde-eindexamens voor het v.w.o. in 1972. In september en oktober werden in Utrecht, Roermond, Haarlem, Zwolle, Breda en Leeuwarden forumbijeenkomsten over de moderne wiskunde-eindexamens in 1972 voor h.a.v.o., m.a.v.o.-4, m.a.v.o.-3 en T-stroom l.t.o. gehouden.

De jaarvergadering is gehouden in het Jaarbeursgebouw te Utrecht op 28 oktober, sprekers waren: dr. D. van Dalen, drs. J. van Dormolen en dr. R. Holvoet. De presentielijst werd getekend door 57 personen.

Op 16 en 17 februari is een conferentie te Woudschoten georganiseerd door de didactiekcommissie. Wegens groot succes is deze conferentie op 6 en 7 april herhaald.
In het april-nummer van 'Euclides' verscheen het eindrapport van de nomenclatuurcommissie.

Het bestuur vergaderde dit jaar 6 maal.

Notulen van de algemene vergadering van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren op zaterdag 28 oktober 1972 in de Koninklijke Nederlandse Jaarbeurs te Utrecht.

Om 10.35 uur opent de voorzitter, dr. J. K. van den Briel, de vergadering. Hij heet in het bijzonder welkom het erelid, dr. Joh. H. Wansink; de spreker, drs. J. van Dormolen; de inspecteurs, drs. W. E. de Jong, E. H. Schmidt, drs. B. J. Westerhof en N. J. Zimmerman; de vertegenwoordiger van Euclides, drs. A. M. Koldijk; de vertegenwoordiger van Velines, S. G. C. Markering, en de vertegenwoordigers van Wolters-Noordhoff, drs. A. B. Oosten en D. W. Soeteman.
De voorzitter herdenkt vervolgens het in het afgelopen jaar overleden erelid, P. Wijdenes.
Hierna spreekt de voorzitter zijn jaarrede uit; deze is gepubliceerd in Euclides.[1])
De notulen van de algemene vergadering van 16 oktober 1971, de jaarverslagen en de begroting 1972/73 worden goedgekeurd. De penningmeester wordt décharge verleend; in de kascommissie worden benoemd de heren L. J. M. van der Zijden en R. M. Th. E. Oomes.
Zonder stemming worden de heren L. van Beek, dr. J. K. van den Briel en drs. J. W. Maassen als bestuurslid herkozen.
De contributie voor het jaar 1973/74 wordt vastgesteld op twintig gulden.
Daar de sprekers nog niet gearriveerd zijn stelt de voorzitter voor alvast aan de rondvraag te beginnen. Drs. M. S. R. Nihom stelt het probleem aan de orde dat voor onder andere een studie economie wiskunde I in het examenpakket verplicht is. De voorzitter deelt mee dat er zelfs leraren economische wetenschappen I zijn, die voor hun vak op het v.w.o. wiskunde I eisen. Drs. B. J. Westerhof deelt mee dat op de besprekingen met de docenten wiskunde, die aan het experiment v.w.o. deelnemen, geregeld het probleem van het samengaan van A en B leerlingen voor wiskunde I aan de orde komt. Voor alle examenkandidaten is het examenniveau gelijk. Bij het steeds verbreden en verdiepen van het inzicht in de stof beginnen de A leerlingen reeds in de vierde klas problemen te krijgen. Ook de sociale weten-

[1]) Euclides, **48**, januari 1973, p. 187.

schappen gaan wiskunde I als examenvak vragen. Een mogelijke oplossing kan zijn om voor de A leerlingen via studielessen extra uren wiskunde te geven.
De voorzitter vraagt zich af of de vereniging hier al een standpunt kan innemen en constateert dat het v.w.o. een hoger niveau van de leerlingen eist dan de vroegere h.b.s.
Vervolgens stelt dr. Joh. H. Wansink de volgende vragen:
Ongeveer 10 jaar geleden is de Wiskundewerkgroep van de WVO in de redactie van Euclides betrokken. Ons tijdschrift werd 1 januari 1963 ook officieel orgaan van die groep. Dit was een beslissing die destijds voor de hand lag gezien het vele werk dat de Wiskundewerkgroep destijds voor ons wiskundeonderwijs had betekend.
De situatie is echter de laatste jaren volkomen veranderd. Niet alleen binnen de Werkgroep maar mede door de overgang van Wimecos in onze vereniging en door het uitvallen van Liwenagel door de fusie van de vier lerarenverenigingen.
Mijn eerste vraag is daarom:
Is het zinvol dat Euclides officieel orgaan blijft van twee zo verschillende partners als onze vereniging en de Werkgroep zijn?
De activiteiten van de Werkgroep liggen al een geruime tijd stil. Van de secretaris vernam ik dat er zelfs werd overwogen de groep op te heffen. Er is zelfs sprake van dat ik mijn contributie over het lopende jaar straks terug zal kunnen krijgen.
Wat is de reactie van ons bestuur en van de redactie van Euclides op deze inactiviteit?
Ik heb de indruk dat ingeval de groep haar werkzaamheden toch nog gaat voortzetten, dit zal gebeuren in een andere geest dan voorheen, met andere doelstellingen. Hoe dat weet ik nog niet, want er worden in de groep die geen vereniging is geen democratische beslissingen over een en ander vernomen. Maar de mogelijkheid bestaat dat als het werk wordt voortgezet er toch divergentie plaatsheeft ten aanzien van de doelstellingen met ons. Vandaar mijn laatste vraag:
Wil ons bestuur eventueel met de redactie samen nagaan of ze de verhouding tot de werkgroep opnieuw in studie wil nemen?
De voorzitter deelt mee dat er met de Werkgroep besprekingen zijn om de Werkgroep met de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren te laten samengaan. Als leden van de Werkgroep een bijzondere conferentie willen houden dan kan dit gesubsidieerd worden.
De heer Wansink hoopt dat dan de grote vereniging het laatste woord houdt en er geen gelijkwaardige partners ontstaan.
Vervolgens verwelkomt de voorzitter de sprekers dr. D. van Dalen en dr. R. Holvoet met hun echtgenotes alsmede dr. C. de Munter namens de Belgische Vereniging van Wiskundeleraren.
De vergadering wordt nu in twee delen gesplitst en de heer dr. D. van Dalen krijgt het woord over *'De logica houdt niet op bij de waarheidstafels'* en de heer drs. J. van Dormolen over *'Geen modellessen, wel lesmodellen'*.
Na de middagpauze krijgt de heer dr. R. Holvoet het woord over *'Morfismen'*.
Hierna wordt de rondvraag voortgezet.
Allereerst vermeldt de voorzitter een verzoek van de redactie van Pythagoras om voorstellen en ideeën voor artikelen aan de redactie te zenden.
Vervolgens komt een brief van de heer N. L. M. van Leeuwen ter sprake, waarin hij advies vraagt voor wiskunde op 3 havo.
Moet men hier voor alle leerlingen dezelfde stof brengen of mag men reeds op twee niveaus werken, waardoor een pakkettenkeuze reeds voor de derde klas wordt beïnvloed?
Uit de vergadering bleek dat op een school waar voor de derde klas gesplitst werd dit bezwaren van de ouders opriep. Verscheidene scholen splitsen in de loop van het derde leerjaar, meestal na Kerstmis. Indien voor wiskunde de lessen op de parallelklassen op dezelfde uren staan is een herindeling in de loop van het jaar zonder veel problemen te realiseren.
Ook bij de C.M.L.W. zijn vanaf het begin voorstanders geweest van een splitsing na het tweede jaar.
Dr. L. v.d. Brom vraagt waarom alleen voor wiskunde een dergelijke maatregel genomen moet worden. Men vraagt zich af of men zonder splitsing nog wel op niveau komt of dat men te veel aan de zwakkeren gaat toegeven.
Enige scholen vonden een oplossing in minder uren wiskunde in de onderbouw en extra uren in de bovenbouw (b.v. 4-3-3-6-5).

Dr. R. Holvoet vertelt dat in België dit probleem niet ter sprake komt daar de minister beslist. In de onderbouw heeft men daar 4 uren wiskunde en in de bovenbouw 3, 4, 5 of 7 uren per week, afhankelijk van de gekozen studierichting.
De voorzitter constateert dat er geen duidelijk verenigingsstandpunt uit te voorschijn komt.
In de verdere rondvraag komt men terug op de universitaire eisen voor toelating tot het w.o.
Drs. J. van Dormolen meent dat de wiskunde-onderbouw voldoende moet zijn om vele wetenschappelijke studies te volbrengen.
Drs. B. J. Westerhof merkt op dat de minister besluit hoe de toelating tot de universiteiten is. In bepaalde gevallen mag een voortentamen gehouden worden. Het probleem ligt bij de sociale wetenschappen. Deze mogen een voortentamen eisen en dan zullen de leerlingen wiskunde als examenvak kiezen. Laat men de leerlingen echter adviseren voortentamen te doen. Voor de voorbereiding zijn mogelijkheden binnen de universiteit of binnen een samenwerking tussen avondscholen en universiteit. Ook voor het voormalige v.h.m.o. was deze mogelijkheid aanwezig voor A-leerlingen bij medicijnen en voor A-, resp. B-leerlingen bij economie voor wiskunde resp. boekhouden. Bovendien ligt er tussen slagen en aanvang van het universitaire jaar een behoorlijke tijd om zich al op een voortentamen voor te bereiden. Drs. W. E. de Jong meent dat de universiteiten wel tentamens willen afnemen doch zich afzijdig houden van opleiding. Hij denkt dat wiskunde I veel zwaarder is dan een voortentamen en hij vraagt zich af of de huidige indeling in wiskunde I en wiskunde II nog wel juist is en of voor B-kandidaten wiskunde I niet te onvolledig wordt wanneer men te veel rekening houdt met A-leerlingen.
Drs. B. J. Westerhof merkt op dat wiskunde I bedoeld is voor voortgezette studie in de exacte vakken, medicijnen of aan de t.h. Nu wordt wiskunde I ook voor andere vakken belangrijk. De subcommissie AVO van de CMLW heeft dit probleem gesignaleerd en begin 1972 de eis wiskunde I voor de sociale wetenschappen afgewezen.
De voorzitter meent dat wiskunde 3 is afgewezen wegens een te verwachten te kleine groepsbezetting. Deze verwachting is nu vermoedelijk niet meer juist. Er zijn nu twee oplossingen, n.l. aanpassing van wiskunde I of invoering van wiskunde 3. Wiskunde II begint, daar het nergens geëist wordt, een aanvechtbare plaats in de lijst van keuzevakken in te nemen.
Dr. D. van Dalen wijst op een mathematiseren binnen de sociale wetenschappen waardoor men steeds meer wiskunde nodig zal hebben. Een aanpassing van het wiskundeprogramma op dit moment kan over enkele jaren wel eens tot een te geringe inhoud leiden.
De heer J. M. Derksen meent dat de urentabel te gering wordt nu ook statistiek in het programma komt.
Drs. W. E. de Jong zegt dat dit een probleem voor het bevoegd gezag is. Dr. P. G. J. Vredenduin wijst er op dat voorbeeldtabellen steeds meer 4-4 te zien geven voor de uren wiskunde I op de bovenbouw. Hij wijst ook op het advies van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. De heer M. Kindt deelt mede dat van de elf experimenterende scholen die vorig jaar eindexamen afnamen er acht met een urenaantal 4-4 werkten.
De voorzitter meent dat de wiskundedocent aan de hand van de gedetailleerde programma's en de experimenteindexamens bij het bevoegd gezag zijn claim voor 4-4 wel waar kan maken.
Drs. W. E. de Jong bedankt vervolgens namens de inspectie voor de uitnodiging en verklaart dat de inspectie zich bij de vereniging thuis voelt en graag aanwezig is.
Dr. C. de Munter bedankt namens de Belgische gasten. Allereerst brengt hij aan de vergadering een groet uit België over; vervolgens dankt hij voor de uitnodiging en de goede ontvangst; tenslotte spreekt hij de wens uit dat de uitwisseling tussen Nederland en België nog zal toenemen.
Om 16.15 sluit de voorzitter de vergadering.

Contributie

Op de algemene ledenvergadering van 28 oktober 1972 is besloten de contributie voor het verenigingsjaar 1973-1974 te handhaven op *f* 20,–.
Leden, die Euclides niet via de vereniging ontvangen betalen *f* 8,–.
Omdat het verenigingsjaar op 1 augustus is begonnen, verzoek ik u uw contributie te storten of over te maken op giro 143917 ten name van Ned. Ver. v. Wiskundeleraren te Amsterdam.
U zult uw ledenadministratie veel tijd en moeite en de vereniging kosten besparen als u uw bijdrage een dezer dagen verzorgt.

De penningmeester.

Boekbespreking

H. Freudenthal, *Mathematics as an Educational Task*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht 1973, XII + 680 blz., ƒ 60,– (in linnen gebonden ƒ 120,–).

Bekend is, dat de auteur altijd al grote belangstelling gehad heeft voor het voortgezet onderwijs en dat hij zijn krachten, sinds hij de leiding op zich genomen heeft van het IOWO, geheel inzet ten bate van het wiskunde-onderwijs in Nederland.
Het boek is dan ook het resultaat van een vruchtbare samensmelting van de wetenschappelijke achtergronden van de schrijver en zijn didactische inzichten. Het verdient de belangstelling van ieder die zich voor het wiskunde-onderwijs interesseert.
Om het wezenlijke van de vernieuwing van het wiskunde-onderwijs te begrijpen is het noodzakelijk de specifieke kenmerken van de moderne wiskundige methoden te doorgronden. Schrijver geeft hiervan een uitstekend overzicht in het tweede hoofdstuk, getiteld Mathematics Today. Dit hoofdstuk is naar mijn inzicht het meest imposante van het hele boek.
Naast de wetenschappelijke inzichten van de auteur staan uiteraard centraal zijn didactische inzichten. Wat wil hij: verheerlijking van de strenge wiskunde? Geenszins. Strengheid die het bevattingsvermogen van de leerling te boven gaat, vindt hij uit den boze. Een axiomatische fundering van de wiskunde of van delen ervan kan dan ook geen genade in zijn ogen vinden. Wiskunde vindt zijn oorsprong in de realiteit en in het intuïtieve denken. De mathematische instructie moet met deze oorsprong rekening houden. Zo is het aangewezen de fundamentele aritmetische begrippen en operaties te definiëren en te ontwikkelen in overeenstemming met de intuïtieve manier waarop ze tot stand zijn gekomen. Dat is niet onwetenschappelijk. Integendeel, ook het officiële mathematisch strenge denken is van deze intuïtieve inhoud uitgegaan.
Om een concreet voorbeeld te noemen: het natuurlijk getal kan als telgetal ingevoerd worden en ook als kardinaalgetal. Voor het intuïtieve denken is de oneindig voortlopende telrij primair; secundair is dat de zo ontstane getallen gebruikt kunnen worden om de omvang van een verzameling te benoemen.

Hoe definiëren we het produkt van twee natuurlijke getallen? Door middel van de produktverzameling? De wetenschappelijke methode is door middel van inductie: $1 \cdot a = a$ en $(b + 1)a = ba + a$. Inderdaad gaan we intuïtief ook zo te werk: om 8 maal 6 te vinden tellen we bij 7 maal 6 nog 6 op. Het ligt dan ook voor de hand op analoge manier te werk te gaan en niet de produktverzameling te hulp te roepen. Is er iemand, zo vraagt Freudenthal, die de vraag '1 kat heeft 4 poten; hoeveel poten hebben 5 katten?' oplost door de produktverzameling van de katten en de poten te vormen?
Wat is een functie? Is het een speciaal soort relatie of is het een toevoeging? Evident is, dat het in het intuïtieve denken een toevoeging is. Dat is dan ook het uitgangspunt waarvan de functie-definitie dient uit te gaan. Ik geloof, dat de schrijver de spijker hier wel op de kop slaat.
Kenmerkend is in dit verband ook het bijzonder fraaie hoofdstuk over de analyse. De schrijver ontwikkelt hier een methode om de analyse intuïtief op te bouwen, en wel op een zodanige manier dat de leerling een helder inzicht krijgt in de betekenis van dit vak. Differentiëren en integreren wordt tegelijk ingevoerd, het differentiëren door middel van differenties van functiewaarden en het integreren door deze differenties te sommeren.
Het verband tussen wiskunde en realiteit mag niet uit het oog verloren worden. Het zal dan ook niemand verwonderen, dat aan het begrip 'grootheid' ruime aandacht besteed wordt. Een grootheid is een verzameling waarin een ordening en een optelling gedefinieerd is. Deze verzameling wordt afgebeeld naar de verzameling van de positieve reële getallen op zodanige manier dat ordening behouden blijft en dat de som van de beelden gelijk is aan het beeld van de som. Daarbij wordt bijv. cm de naam voor een bepaalde functie die de elementen van een grootheid afbeeldt naar de positieve reële getallen. Ook inversen van grootheden blijken grootheden te zijn. Zo komt men tot functies als $\text{cm} \cdot \text{sec}^{-1}$.

De functie $\sec^{-1}$ beeldt de inverse af van de grootheid tijd, d.i. de frekwentie. Deze grootheden spelen een belangrijke rol in de analyse. Er is daar een discrepantie tussen het taalgebruik van de fysicus en dat van de mathematicus. Als de fysicus wil vermelden, dat de grootheid p (maatgetal van de druk) afhangt van de grootheid V (maatgetal van het volume), schrijft hij $p(V)$. Enerzijds is nu p een functiesymbool, anderzijds is het symbool voor een grootheid. Deze ambivalentie van de notatie leidt tot moeilijkheden. De auteur tracht een oplossing te vinden voor het probleem fysicus en mathematicus elkaar te laten verstaan door het spreken van één taal. Hij stelt daartoe zijn functienotatie voor, maar voegt eraan toe, dat hij dit voorstel eerder als een uitdaging beschouwt dan als laatste wijsheid. Zou het mogelijk zijn hier met differentialen te werken? Men zou op wiskundig verantwoorde wijze differentialen kunnen invoeren. Men kan dan de symbolen $\mathrm{d}p$ en $\mathrm{d}V$ gebruiken zonder daarbij p als functie van V te beschouwen. En zelfs kan men $\mathrm{d}p/\mathrm{d}V$ schrijven zonder daarbij p als functie van V te zien. De symbolen p en V verliezen hun ambivalentie en stellen uitsluitend grootheden voor, terwijl de fysische terminologie niet afwijkt van de wiskundige. Dit is maar een schuchter antwoord op de uitdaging.

Uitvoerig gaat schrijver in op het probleem van de meetkunde. Begrijpelijkerwijs verwerpt hij elke axiomatische fundering. Het meetkundige denken vindt zijn oorsprong in de aanschouwing (of de realiteit, als men dat liever wil). Zo moet het dan ook bij het onderwijs ontwikkeld worden. Losmaking van het wiskundige denken van de oorspronkelijke achtergrond is een interessante bezigheid zodra men daar geestelijk aan toe is. In een geforceerd vroeg stadium mist het zijn doel. In het hoofdstuk over de meetkunde vindt de lezer een schat van wetenswaardigheden betreffende de achtergronden van de schoolmeetkunde. Zeer lezenswaard zijn de uiteenzettingen over de verschillende aspecten van het hoekbegrip en over de ordening en de oriëntatie. Sympathiek is de manier waarop recht gedaan wordt aan het belangrijke werk, dat op het terrein van het meetkunde-onderwijs gedaan is door Dieke van Hiele. Voor het vak 'meetkunde met vectoren' heeft Freudenthal geen goed woord over. Het is geen vlees en geen vis, d.w.z. enerzijds is het geen geschikte behandeling van de lineaire algebra en anderzijds slechts een armzalige behandeling van de meetkunde met soms erg oninteressante vraagstukken. Zonder twijfel houdt deze ontboezeming een waarschuwing in die we ter harte mogen nemen.
In het hoofdstuk over logica verdedigt de auteur, dat 'logisch' denken een belangrijk goed is, maar dat inzicht in 'logisch' denken bij het voortgezet onderwijs niet verkregen wordt door bestudering van logica als speciaal vak.
Een recensie alleen in majeur is wat eenzijdig. Op sommige plaatsen oefent de schrijver kritiek op meningen van anderen en op door hem gelezen boeken op emotionele manier. De objectiviteit van de kritiek wordt daardoor minder duidelijk en wel eens dreigt de tekst daardoor wat wijdlopig en minder boeiend te worden. Gelukkig beperkt de invloed hiervan zich tot delen van de hoofdstukken over het getalbegrip en van de beschouwingen over verzamelingen.
Ik heb in deze recensie slechts enkele grepen kunnen doen betreffende de inhoud van dit hartstochtelijk geschreven boek. Er staat ongelooflijk veel in. Ik kan het warm aanbevelen. Het is een boek, dat je niet ineens uitleest. Het is een werk dat je voor het grijpen moet hebben, waar je hoofdstukken in leest en dat je raadpleegt als je het nodig hebt. En dan kan je er buitengewoon veel aan hebben.
Bij wijze van aardigheid in de rubriek recreatie een paar probleempjes uit het boek.[1])

P. G. J. Vredenduin

J. D. Lambert, *Computational methods in ordinary differential equations*, John Wiley and Sons, London 1973, 278 p., prijs £ 5.50

Dit boek is geschreven voor hen die over enige basiskennis van numerieke wiskunde beschikken, en zich wensen te verdiepen in een studie van numerieke methodes voor het oplossen van gewone differentiaalvergelijkingen. Het 'standaardwerk' op dit gebied is P. Henrici's 'Discrete variable methods in ordinary differential equations' uit 1962 (Wiley). Sindsdien is veel nieuwe literatuur op dit gebied verschenen. Dit boek geeft een overzicht van de belangrijkste methodes, waarbij ook zeer recente resultaten verwerkt zijn. De schrijver heeft zich vrijwel uitsluitend beperkt tot methodes voor het oplossen van beginwaarden-

[1]) In het volgende nummer.

problemen. De notatie sluit aan bij die van Henrici, terwijl ook voor vele bewijzen naar dit boek verwezen wordt. Behandeld worden o.a. Lineare Multistap Methodes, Runge-Kutta Methodes, Hybride Methodes dwz. mengvormen van de twee voorafgaande methodes), Extrapolatiemethodes, Methodes voor speciale problemen en Methodes voor stijve differentiaalvergelijkingen (een gebied dat vooral de laatste jaren sterk in de belangstelling staat). Er wordt een groot aantal numerieke voorbeelden en oefeningen gegeven.
J. van de Craats.

Abe Mizrahi, Michael Sullivan, *Finite mathematics with applications* for business and social sciences. Joh. Wiley & Sons, New York, 1973, 520 blz. £5.00.

Dit boek is geschreven voor studenten met een te kort aan wiskundekennis, die in hun studie tot hun verbazing de wiskunde toch op hun pad vinden.
Dit brengt met zich mee, dat men geen abstracte theorieën opbouwt, doch dat de onderwerpen, uit de praktijk genomen, via wiskundige modellen worden onderzocht. De daarvoor benodigde wiskundekennis wordt dan in kort bestek bezien, met voorbeelden toegelicht, met opgaven getraind (de antwoordenlijst beslaat 60 blz.). Bovendien volgt na elk hoofdstuk een lectuurlijst.
De volgende onderwerpen komen ter sprake:
Logica (34 blz.), verzamelingen (38 blz.), kansrekening (60 blz.), lineaire vergelijkingen en ongelijkheden, maximalisatie van doelfunctie (50 blz.), matrixalgebra (50 blz.), de simplexmethode m.b.v. matrices, matrices en graphentheorie, markowketens, speltheorie.
De uitvoering is luxueus, (vergeleken met onze schoolboekjes is de prijs redelijk) men kan er wel plaats voor inruimen in de schoolbibliotheek.
Burgers

Peter Henrici, *Elemente der numerischen Analysis,* 2 dln., Hochschultaschenbücher Band 551 und 562, Bibliografisches Institut, Mannheim/Wien/Zürich, samen 425 blz., DM 8,90 per deel.

De twee boekjes zijn bewerkingen van colleges, die de schrijver, thans hoogleraar aan de Technische Hogeschool te Zürich, gegeven heeft aan studenten van de universiteit van Californië te Los Angeles.
In het eerste deel worden na een inleiding, waarin o.a. de complexe getallen aan de orde komen, als belangrijkste onderwerpen behandeld iteratie-procédé's en lineaire differentie-vergelijkingen. Het tweede deel is voornamelijk gewijd aan numeriek differentiëren, numeriek integreren en het numeriek benaderen van de oplossingen van differentiaal-vergelijkingen. Een hoofdstuk over afrondingsfouten besluit het geheel. In alle hoofdstukken komen vraagstukken voor, waarvan de antwoorden aan het eind van het tweede deel bijeengebracht zijn.
Bestudering van meerdere der behandelde onderwerpen kan bijna onontbeerlijk genoemd worden voor diegenen, die zich bezighouden met wetenschappen, waarvoor elementaire kennis van de numerieke wiskunde noodzakelijk is. Daarnaast kan lezing van deze boekjes aanbevolen worden aan allen, die belangstelling hebben voor de wiskundige methoden, die heden ten dage gebruikt worden in andere wetenschappen.
K.J.L. Rogier

Didactische Literatuur

uit buitenlandse tijdschriften

Mathematica & Paedagogia, 56-59, 1972-1973.

A. Vanderlinden, Activités mathématiques pour les élèves de 6e;
H. Wunderlich, Reelle Zahlen;
E. Gillet, Esquisse du continu d'un cours de géométrie analytique;
W. de Roover, Bedenkingen over de ordening der reële getallen;
Y. Tourneur, Classification des questions d'évaluation en mathématique;
M. Kassab, L'anthropologie et la mathématique;
Leerplan wiskunde voor de tweede van de Humanoria.

Y. Tourneur, Taxonomie des objectifs cognitifs en mathématique;
J. Teugels, Enkele voorbeelden uit de diskrete kansrekening;
G. Noël, Espaces affines et espaces vectoriels;
R. Mariën, Booleaanse algebra;
R. Holvoet, Cayleygraphes et papygrammes;
J. Drabbe, Le jeu de Marienbad;
Leerplannen Wiskunde voor de eerste klassen rijksmiddelbaar onderwijs.

D. van Dalen, Propositielogica en mini-modeltheorie;
C. Radoux, Géométrie 'dans' l'espace et calcul vectoriel;
C. Hug, Expérience d'enseignement des lois de composition à l'école primaire;
E. Heuchamps, Programmes linéaires;
R. Wilrycx, Een merkwaardige functie.

R. Bens, Na een eerste jaar nieuw leerplan voor de derde;
J. Banning, Het parallellisme;
G. Bosteels, Relaties;
C. Radoux, L'indicateur d'Euler et le corps F_p des classes résiduelles modulo un nombre premier p;
Joh. H. Wansink, De inrichting van de vakbibliotheek voor wiskunde op elke school.

Recreatie

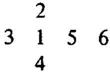
Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Dr. P. G. J. Vredenduin, Van Wassenaersheuvel 73, Oosterbeek

300. Verdeel een vierkant in vijf stukken zo, dat deze aan elkaar gepast kunnen worden tot twee congruente gelijkzijdige driehoeken. (B. Kootstra)

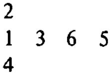
301. Men verdeelt 7 rode, 3 witte, 8 blauwe en 2 oranje fiches onder twee personen zo, dat elk er 10 krijgt. Wat is de kans dat, indien de een een k-tal ($k > 0$) fiches krijgt van een bepaalde kleur, de ander eveneens een k-tal fiches van een bepaalde (natuurlijk niet noodzakelijk dezelfde) kleur krijgt? (Mevr. B. C. Dijkstra-Kluyver)

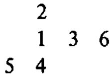
298. Hoeveel verschillende netwerken van een kubus zijn er mogelijk?
Nummer de zijvlakken van de kubus. Het grondvlak is 1, de opstaande zijvlakken rondgaande 2, 3, 4, 5 en het bovenvlak 6.

1. Er is een vlak waarvan de samenhang met de vier aanliggende zijvlakken niet verbroken wordt. Noem dit vlak 1. Dit levert maar één mogelijkheid, t.w.

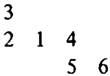


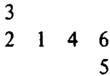
2. Er is geen vlak waarvan de samenhang met vier, maar wel een waarvan de samenhang met drie aangrenzende vlakken niet verbroken wordt. Noem een dergelijk vlak weer 1. We krijgen de volgende mogelijkheden:

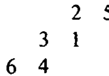




3. De samenhang van elk vlak wordt met hoogstens twee aangrenzende vlakken niet verbroken. Een vlak waarvan de samenhang met twee vlakken niet verbroken wordt, noemen we 1. Dit levert de volgende mogelijkheden:

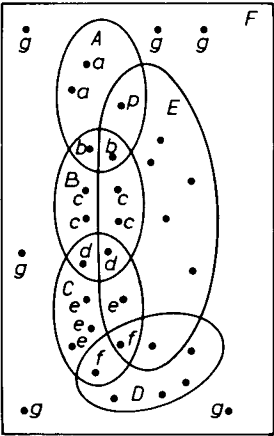




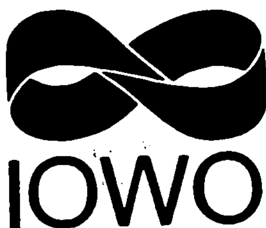


Dus in totaal zes mogelijkheden.

299. *P* en *Q* nemen om beurten een element weg. Degeen die uit een verzameling het laatste element wegneemt, krijgt een punt. *P* begint. Welke strategie leidt voor hem tot winst?



P neemt eerst element *p*. Als *Q* een element wegneemt waarbij een bepaalde letter staat, neemt *P* daarna een element weg waarbij dezelfde letter staat. Op deze wijze is *P* ervan verzekerd uit *A*, *B*, *C* en *F* het laatste element te kiezen. *P* wint dus met 4 – 2 op zijn minst. Ik weet niet of, er strategieën bestaan, die een hogere winst voor *P* verzekeren. In elk geval is 6 – 0 onmogelijk, want *Q* kan zich concentreren op een van de verzamelingen met een oneven aantal elementen en zorgen, dat hij daarvan het laatste element krijgt.



Het Instituut voor de Ontwikkeling van het Wiskunde Onderwijs (I.O.W.O) verzorgt in opdracht van de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde de landelijke leerplan-ontwikkeling van het wiskunde-onderwijs voor leerlingen van kleuter- en basisonderwijs, algemeen vormend voorbereidend wetenschappelijk onderwijs en beroepsonderwijs.
Tot de vele aktiviteiten van het instituut behoren konferenties, kursussen en eksperimenten gericht op alle aspekten, die bijdragen tot de vernieuwing van het Wiskunde-onderwijs

Bij dit instituut kan geplaatst worden een:

een wetenschappelijk (hoofd)medewerker

voor de leerplanontwikkeling wiskunde in het voortgezet onderwijs

Vereisten:

— eerste graadsbevoegdheid wiskunde
— onderwijservaring
— ruime belangstelling voor de vernieuwing van het wiskunde-onderwijs
— bereidheid tot werken in teamverband
— ervaring in het geven van leiding kan als aanbeveling dienen

Rechtspositie:
De medewerker zal worden aangesteld bij de Rijksuniversiteit te Utrecht in het rangenstel van wetenschappelijke ambtenaren

Sollicitaties richten aan:
Prof. Dr. H. FREUDENTHAL, Hoogleraar-direkteur IOWO
Tiberdreef 4, Utrecht

Inlichtingen over de funktie worden gaarne verstrekt door:
J. N. BOSMAN, Algemeen Beheerder IOWO
tel.: 030-611611; privé 085-422596

INHOUD